

# VU Research Portal

## Nomographische Lösung von Kurs- und Rentabilitätsaufgaben

Gabel, Adrianus

1935

### **document version**

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

### **citation for published version (APA)**

Gabel, A. (1935). *Nomographische Lösung von Kurs- und Rentabilitätsaufgaben*.

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

### **E-mail address:**

[vuresearchportal.ub@vu.nl](mailto:vuresearchportal.ub@vu.nl)

W

0274

WD

NOMOGRAPHISCHE LÖSUNG  
VON KURS- UND  
RENTABILITÄTSAUFGABEN

Ir. A. GABEL



W. 0279.WD

5  
45e 24

NOMOGRAPHISCHE LÖSUNG VON KURS- UND  
RENTABILITÄTSAUFGABEN

BOEKERIJ FAC. W. EN N.

VRIJE UNIVERSITEIT

WISKUNDE No. 4624

*VRIJE UNIVERSITEIT TE AMSTERDAM*

NOMOGRAPHISCHE LÖSUNG  
VON KURS- UND  
RENTABILITÄTSAUFGABEN

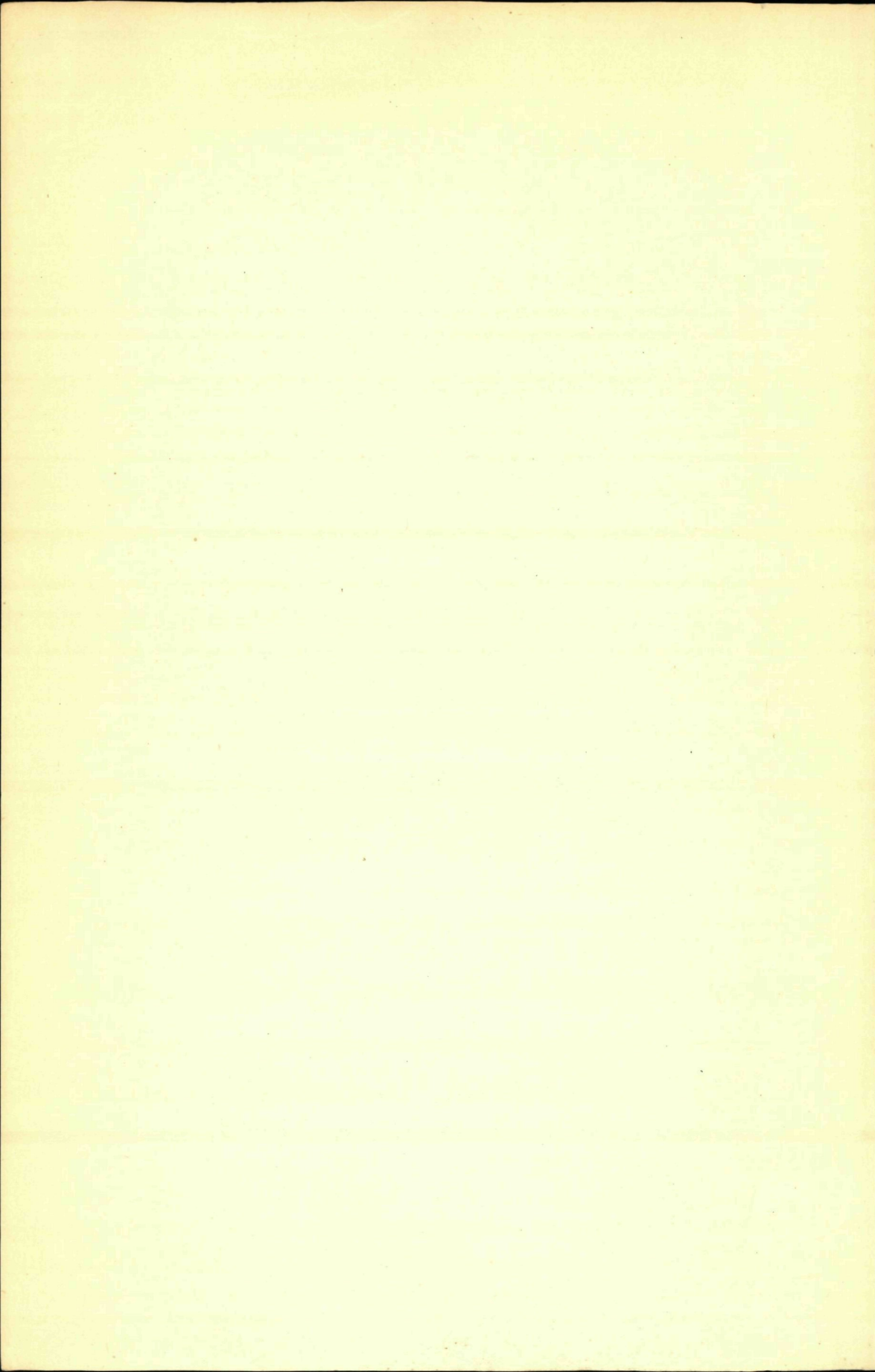
ACADEMISCH PROEFSCHRIFT  
TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN  
DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE,  
OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS  
DR. L. VAN DER HORST, HOOGLEERAAR  
IN DE FACULTEIT DER GENEESKUNDE, IN HET  
OPENBAAR TE VERDEDIGEN OP ZATERDAG  
9 NOVEMBER 1935, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR,  
IN HET GEBOUW DER MAATSCHAPPIJ VAN  
DEN WERKENDEN STAND, KLOVENIERS-  
BURGWAL 87, TE AMSTERDAM

DOOR

Ir. ADRIANUS GABEL  
GEBOREN TE SCHIEDAM

AMSTERDAM — 1935  
N.V. NOORD-HOLLANDSCHE UITGEVERSMAATSCHAPPIJ





AAN MIJN VROUW





De voltooiing van dit proefschrift biedt mij een welkome gelegenheid, een woord te richten tot U, Prof. Dr. M. VAN HAAFTEN, hooggeachte Promotor. Gij hebt mijn aandacht op dit onderwerp willen vestigen, bij de samenstelling van het proefschrift mocht ik Uw daadwerkelijke hulp ondervinden, steeds zijt gij mij met groote vriendelijkheid en belangstelling in de vordering van het werk tegemoet getreden. Voor dit alles betuig ik U mijn bijzonderen dank.

Ook U

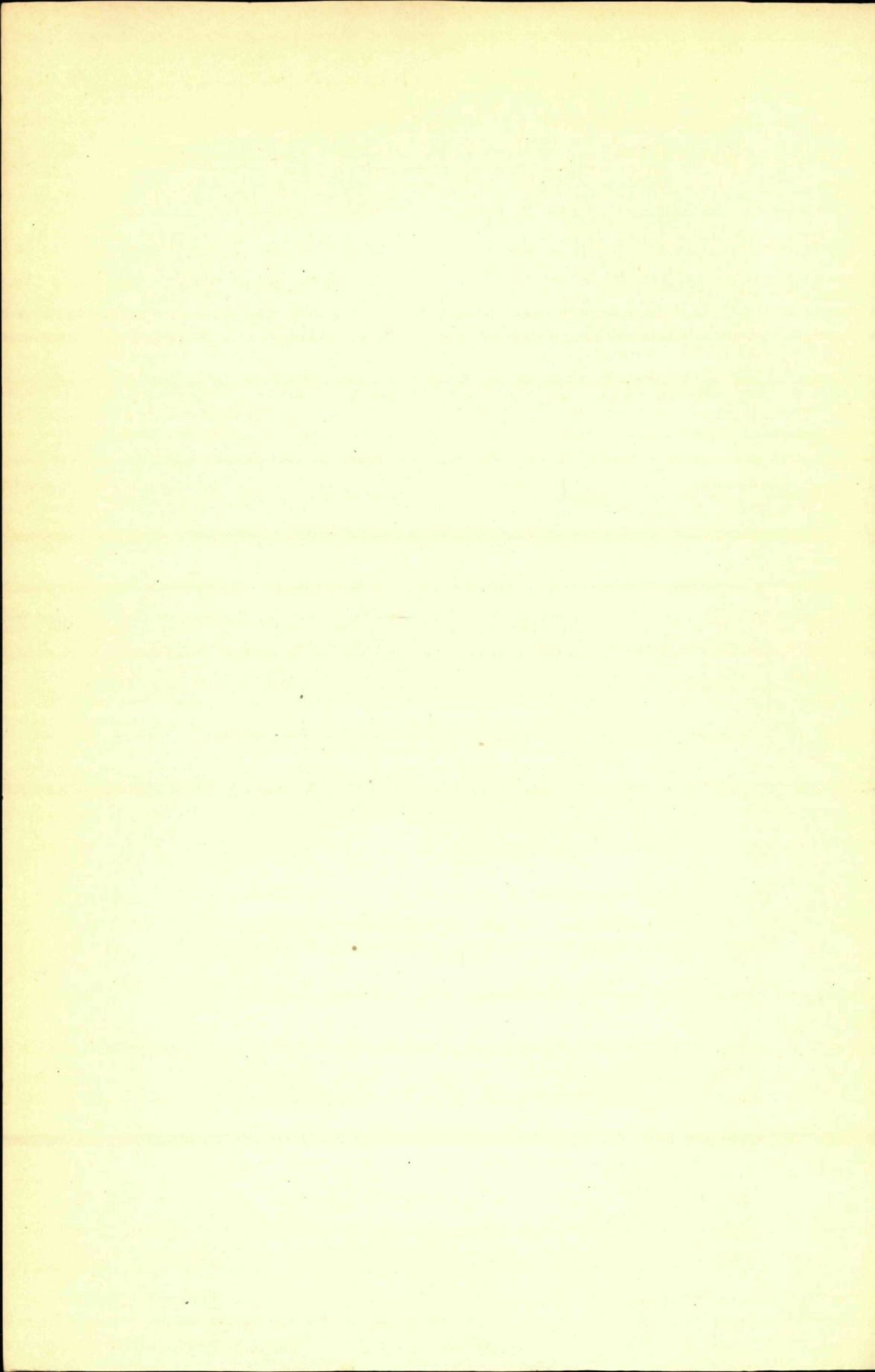
Prof. Dr. J. F. KOKSMA,  
Prof. Dr. G. J. SIZOO,  
Prof. Dr. J. COOPS

ben ik zeer erkentelijk voor de mij betoonde welwillendheid.

Hooggeleerde HOLWERDA, dat ik Uw colleges in verzekeringswiskunde aan de Nederlandsche Handelshoogeschool heb kunnen volgen, beschouw ik als een groot voorrecht.

Het is mij een behoefte, mijn dank uit te spreken voor het onderwijs, dat ik, nu reeds geruimen tijd geleden, aan de Technische Hoogeschool ontving.

Ten slotte betuig ik mijn welgemeenden dank aan Dr. H. BOLWIN te Wassenaar, die mijn proefschrift in het Duitsch heeft willen vertalen, voor de wijze, waarop hij de op zich genomen taak volbracht heeft.



# INHALT

---

	SEITE
KAPITEL I. Einleitung . . . . .	1
KAPITEL II. Einige Grundbegriffe der Nomographie . . . .	12
I. Funktionsskala. Scharen bezifferter Linien, bezifferter Punkte und zweifach bezifferter Punkte. . . . .	12
II. Netztafeln . . . . .	13
III. Fluchtentafeln . . . . .	16
IV. Nomogramme mit beweglichen bezifferten Scharen . . . . .	19
V. Über die Genauigkeit nomographischer Ab- lesungen . . . . .	23
KAPITEL III. Das Tokometer von M. Kraitchik . . . . .	27
KAPITEL IV. Die „bond yield chart“ von Darville-Johnson . .	39
KAPITEL V. Graphische Tabellen für die Berechnung von Kurs und Rentabilität von Obligationen . . . . .	55
KAPITEL VI. Der Rentabilitätsmesser von Dr. B. H. de Jongh	65
KAPITEL VII. Neue Nomogramme . . . . .	84
LITERATURVERZEICHNIS. . . . .	96
REGISTER . . . . .	98

---





## VERZEICHNIS DER FIGUREN

	SEITE
Figur 1. d'OCAGNE'sche Koordinaten . . . . .	17
2. Gleitende bezifferte Scharen . . . . .	20
3. Das Tokometer von M. KRAÏTCHIK . . . . .	28
4. Idem . . . . .	32
5. Idem . . . . .	34
6. Idem . . . . .	36
6*. Idem . . . . . zwischen 36 u. 37	37
7. Idem . . . . .	36
8*. Die „bond yield chart“ von DARVILLE-JOHNSON zwischen 38 u. 39	39
8. Idem . . . . .	41
9. Idem . . . . .	46
10. Idem . . . . .	48
11. Graphische Tabellen für die Berechnung von Kurs und Rentabilität von Obligationen . . . . .	56
11*. Idem . . . . .	57
12. Idem . . . . .	59
13. Die HAGE'schen Nomogramme für die Gleichung	

$$x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) \frac{1}{(1+r)^n} \dots \dots \dots 62$$

14.	Idem	64
15, 16, 17.	Der Rentabilitätsmesser von Dr. B. H. DE JONGH zwischen	65
18.	Idem	66
19.	Idem	67
20.	Idem	68
21.	Idem	70
22.	Idem	74
23, 24.	Idem	81
25.	Nomogramm für die Gleichung $x_{(2)} = \frac{j s}{r} + \left(1 - \frac{j s}{r}\right) A_{n-1} r$	86
26.	„ „ „ „ $x_{n-u} = (1 + u r) x_{n-u} i$	92
27.	„ „ „ „ $x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) H$	94





## KAPITEL I.

### Einleitung.

§ 1. Zweck der Nomographie ist es, von einer Beziehung zwischen  $n$  Veränderlichen eine graphische Darstellung (Nomogramm) anzufertigen, aus der man zusammengehörige Werte der  $n$  Veränderlichen ablesen kann.

Die Entwicklung der Nomographie zu einem besonderen Zweige der angewandten Mathematik verdanken wir in erster Linie dem französischen Mathematiker MAURICE D'OCAGNE. Er sammelte die vorhandenen Einzelergebnisse, ordnete sie und leitete sie aus einigen Grundprinzipien ab, wodurch ein systematisches Ganzes entstand. Eine erste Skizze davon wurde im Jahre 1891<sup>1)</sup> gegeben, eine sehr ausführliche Behandlung folgte im Jahre 1899<sup>2)</sup>.

In der Zinsrechnung fand die Nomographie bisher wenig Anwendung. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, zu untersuchen, ob die Nomographie bei der Lösung zweier Aufgaben, die in der praktischen Zinsrechnung öfters vorkommen, Dienste leisten kann. Die beiden Aufgaben sind:

1. den reellen Zinsfuss einer Anleihe zu bestimmen, deren Kurs, nomineller Zinsfuss, Dauer, Amortisations- und Zinszahlungsmodalitäten gegeben sind;
2. den Kurs<sup>3)</sup> einer Anleihe zu bestimmen, deren nomineller und reeller Zinsfuss, Dauer, Amortisations- und Zinszahlungsmodalitäten gegeben sind.

Die Lösung der ersten Aufgabe ist in erster Linie notwendig beim Erwerb von Kapitalanlagen. Die Börsenkurse verschiedener Anleihen divergieren nämlich häufig in dem Sinne, dass Anlagen, die im Übrigen für einen bestimmten Zweck als gleichwertig be-

---

<sup>1)</sup> Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. GAUTHIER—VILLARS. Paris 1891.

<sup>2)</sup> Traité de nomographie. GAUTHIER—VILLARS. Paris 1899<sup>1</sup>, 1921<sup>2</sup>.

<sup>3)</sup> Dieser theoretische Kurs wird mathematischer Kurs genannt.

trachtet werden können, nicht immer dieselbe Rendite geben<sup>1)</sup>. Zielbewusste Anlagepolitik erfordert deshalb die schnelle Bestimmung der reellen Verzinsung jeder der angebotenen Anlagen aus ihrem Börsenkurse, da die Zeit für längere Berechnungen meistens nicht zur Verfügung steht.

Der Verfasser kennt holländische Lebensversicherungsgesellschaften, die für die Berechnung der durchschnittlichen Verzinsung ihrer Wertpapieranlagen, deren jährliche Veröffentlichung gesetzlich vorgeschrieben ist, die reelle Verzinsung, wie sie aus dem Börsenkurse berechnet werden kann, zugrundelegen. Bei Anwendung dieser Methode muss für jedes Wertpapier, das sich im Besitze der Gesellschaft befindet, die reelle Verzinsung berechnet werden.

Was die zweite Aufgabe betrifft, so sind auch zwei Fälle zu nennen, in denen ihre Lösung gefordert wird. Zunächst kommt es häufig vor, dass beim Abschluss von Anleihen ein nomineller Zinsfuss gewählt wird, der mit dem reellen nicht übereinstimmt. Zweitens gibt es Versicherungsgesellschaften, die ihren Wertpapierbestand für die Bilanz bewerten auf Grund des mathematischen Kurses. Bei der Berechnung dieses Kurses wird dann als reeller Zinsfuss der für die Berechnung der Prämienreserve gewählte rechnungsmässige Zinsfuss angenommen. In diesem Falle muss für jedes Wertpapier, das die Gesellschaft besitzt, der mathematische Kurs berechnet werden.

§ 2. Hier folgen einige Formeln, die bei der Lösung der beiden genannten Aufgaben Verwendung finden, und auf die in den folgenden Abschnitten jeweils Bezug genommen wird. Die Ableitung der Formeln (6) und (7) findet man in dem Artikel „Cours des emprunts pour divers modes de paiement de l'intérêt nominal“<sup>2)</sup> von M. VAN HAAFTEN; die der Formel (13) in dem Artikel „Le

---

<sup>1)</sup> Dies geht sehr deutlich hervor aus einer Übersicht von 9 Arten von Anleihen in *Wetenschappelijke Balans van de Rijksverzekeringsbank 1917*, Teil I. p. 7. Amsterdam 1919. Siehe ferner M. VAN HAAFTEN. *De moderniseering der intrestrekening*. VAN HOLKEMA EN WARENDORF. Amsterdam 1921. p. 47. und den Artikel *Rentabiliteit van de Nederlandsche oorlogsleeningen* von M. VAN OVEREEM in *Maandblad voor het boekhouden*. Sept. 1919. p. 8.

<sup>2)</sup> Verz.-archief XI (1930) p. (97).



cours d'un emprunt à agio déduit de celui d'un emprunt sans agio" <sup>1)</sup>, gleichfalls von M. VAN HAAFTEN; die Ableitung aller andern Formeln im Lehrbuch des gleichen Verfassers <sup>2)</sup>).

Für eine beliebige Anleihe gilt die Beziehung:

$$(1) \quad . . . . . x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) H.$$

Hierin ist:

$x$  der mathematische Kurs;

$i$  der nominelle Zins, zahlbar am Ende jeder Zeiteinheit;

$r$  der reelle Zinsfuß, bezogen auf die gleiche Zeiteinheit;

$H$  die Summe der mit  $r$  diskontierten Amortisationsbeträge.

Alle diese Grössen sind auf die Einheit des nominellen Kapitals bezogen.

Für Anleihen mit regelmässiger Tilgung kann man aus der allgemeinen Kursformel (1) spezielle Kursformeln ableiten. Gibt  $n$  die Anzahl der Zeiteinheiten an, nach deren Ablauf die Anleihe ganz zurückgezahlt ist, so ergibt sich aus (1) für:

a. *Nicht rückzahlbare Anleihen.*

$$(2) \quad . . . . . x = \frac{i}{r} .$$

b. *Auf einmal rückzahlbare Anleihen.*

$$(3) \quad . . . . . x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) A_{\overline{n}|r},$$

wobei

$$A_{\overline{n}|r} = \frac{1}{(1+r)^n}.$$

c. *Anleihen mit gleichen Tilgungsraten.*

$$(4) \quad . . . . . x = \frac{i}{r} + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{i}{r}\right) a_{\overline{n}|r}.$$

<sup>1)</sup> Verz.-archief XII (1931) p. (9).

<sup>2)</sup> Leerboek der intrestrekening. NOORDHOFF. Groningen 1929. §§ 108, 110, 111, 113, 167, 168, 174.

Hierbei ist

$$a_{\overline{n}|r} = \sum_{m=1}^{m=n} A_{\overline{m}|r}.$$

d. *Annuitätsanleihen.*

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|i}}.$$

In diesen Formeln sind  $i$  und  $r$  auf die gleiche Zeiteinheit bezogen. Wenn  $r$ , wie stets im Folgenden, den jährlichen reellen Zinsfuß bedeutet, gelten die Formeln (1) bis (5) wohl für Anleihen mit jährlicher Zinszahlung, jedoch nicht für die gewöhnlich vorkommenden Obligationen mit halbjährlichen Coupons. Der in solchen Obligationen angegebene jährliche Zinsfuß  $100 j$  ist nur ein scheinbarer nomineller Zinsfuß.

Für Anleihen mit Halbjahrescoupons gelten die Beziehungen:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(2)} = 1 - \frac{r - js}{r - j} (1 - x)$$

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = 1 - \frac{r - j}{r - js} (1 - x_{(2)}).$$

Hier ist  $x_{(2)}$  der Kurs bei halbjährlicher Couponfälligkeit, während  $x$  den Kurs bei jährlicher Fälligkeit angibt. Der scheinbare Zinsfuß  $j$  ist die Summe der Zinsraten, die im Laufe eines Jahres für die Einheit des Nominalkapitals empfangen werden. Ferner ist

$$s = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + r} + 1).$$

Bei halbjährlicher Zahlung des nominellen Zinses ist die allgemeine Kursformel (1) zu ersetzen durch:

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(2)} = \frac{js}{r} + \left(1 - \frac{js}{r}\right) H.$$

Die speziellen Kursformeln werden bei dieser Annahme für:

a. *Nicht rückzahlbare Anleihen.*

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(2)} = \frac{js}{r}.$$



b. Auf einmal rückzahlbare Anleihen.

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(2)} = \frac{js}{r} + \left(1 - \frac{js}{r}\right) A_{\overline{n}|r}.$$

c. Anleihen mit gleichen Tilgungsraten.

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(2)} = \frac{js}{r} + \frac{1}{n} \left(1 - \frac{js}{r}\right) a_{\overline{n}|r}.$$

d. Annuitätsanleihen.

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(2)} = 1 - \frac{r - js}{r - j} \left(1 - \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|j}}\right).$$

MIT AUFGELD RÜCKZAHLBARE ANLEIHEN. — Für jeden Anleihentyp gilt die Beziehung:

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x_{(j,r)}^g = (1 + g) x_{(j,r)}.$$

Hier ist  $g$  das Aufgeld pro Einheit des Nominalkapitals, während

$$j = \frac{j}{1 + g}$$

ist.

Durch das Symbol  $x_{(j,r)}^g$  wird der Kurs einer Aufgeldanleihe eines bestimmten Anleihentyps angedeutet, durch  $x_{(j,r)}$  der Kurs der à pari rückzahlbaren Anleihe desselben Typs.

ANLEIHEN MIT UNREGELMÄSSIGER TILGUNG können häufig auf solche mit regelmässiger Tilgung zurückgeführt werden.

Eine in  $n$  unregelmässig verlaufenden Raten rückzahlbare Anleihe kann letzten Endes immer als die Summe von  $n$  auf einmal rückzahlbaren Anleihen gedeutet werden. Häufig jedoch ist sie einer kleinen Zahl von Anleihen mit regelmässiger Tilgung äquivalent, denn oft treten Diskontinuitäten im Verlauf der Tilgung nur sporadisch auf, sodass die Tilgung dazwischen jahrelang regelmässig verläuft. Resultieren die Diskontinuitäten aus Erhöhung der Tilgungsraten, so kann man davon ausgehen, dass die stärkste Tilgung von Anfang an gegolten habe. Der nominelle Betrag der Anleihe wird dann zu gross angesetzt, sodass einige Anleihen in Abzug zu bringen sind. Findet man dagegen eine unregelmässig

schwächer werdende Tilgung, so kann die Anleihe oft in eine Summe regelmässig tilgbarer Anleihen zerlegt werden.

Ist eine gegebene Anleihe zerlegbar in  $m$  regelmässig tilgbare Anleihen mit den nominellen Beträgen  $k_1, k_2, \dots, k_m$  und den Kursen  $x_1, x_2, \dots, x_m$  pro Kapitaleinheit, nennt man ferner das nominelle Kapital der gegebenen Anleihe  $k$  und ihren Kurs pro Kapitaleinheit  $x$ , so ist

$$(14) \quad \dots \dots \dots x = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{p=m} k_p x_p.$$

Man berücksichtigt eine Couponsteuer von  $p\%$ , indem man in den oben angegebenen Formeln den nominellen Zins mit dem Faktor  $(1 - \frac{p}{100})$  multipliziert.

Das holländische Couponsteuergesetz (Staatsblad 1933 N<sup>o</sup>. 780) betrachtet für inländische Wertpapiere, die nach dem Inkrafttreten des Gesetzes ausgegeben wurden, als Ertrag auch die Differenz zwischen dem Ausgabekurs und dem höheren Rückzahlungskurs, wenn diese Differenz mehr als  $5\%$  beträgt. Eine à pari rückzahlbare Anleihe, deren Ausgabekurs  $100x$  betrug, wird hierdurch, wenn  $100 - 100x > 5$  ist, eine Anleihe mit  $-p(1-x)\%$  Aufgeld. Um die Grösse des bei Vernachlässigung dieser Besteuerung der Kursdifferenz entstehenden Fehlers zu veranschaulichen, diene folgendes Beispiel. Der Kurs einer  $4\frac{1}{2}\%$ igen Annuitätsanleihe mit einer Laufzeit von 20 Jahren betrage  $92\%$ , der Ausgabekurs sei  $94\%$ . Die Steuer beträgt  $2\%$ . Als reellen Zinsfuss findet man  $5,380\%$ . Wenn man die Besteuerung der Kursdifferenz vernachlässigt, findet man  $5,389\%$ , also  $0,009\%$  mehr. Wir berechneten den Fehler auch für einige auf einmal rückzahlbare Anleihen und fanden ihn beträchtlich kleiner als bei der Annuitätsanleihe. Der Einfluss der Besteuerung der Kursdifferenz ist also nicht gross. Da ausserdem Ausgabekurse unter  $95\%$  sehr selten vorkommen, werden wir uns mit dieser Steuereigentümlichkeit nicht weiter beschäftigen.

Die Tatsache, dass Wertpapiere gewöhnlich nicht gerade an den Couponfälligkeitstagen gehandelt werden, erfordert zwischenzeitliche Kursbestimmung. Den Kurs einer Anleihe mit der Laufzeit



$m$  nennen wir  $x_m$ . Ist nun  $n$  eine ganze Zahl und  $0 < u < 1$ , dann ist der Kurs (exclusive laufender Zinsen) einer Anleihe, deren Laufzeit  $n-u$  ist,

$$x_{n-u} = (1+r)^u x_n - u i,$$

wofür als Annäherung genommen wird:

$$(15) \quad \dots \quad x_{n-u} = (1+ur) x_n - u i.$$

Nur bei auf einmal rückzahlbaren Anleihen kann man  $x_{n-u}$  durch lineare Interpolation zwischen  $x_n$  und  $x_{n-1}$  berechnen<sup>1)</sup>.

In der Praxis wird Formel (15) auch für zwischenzeitliche Kursbestimmung von Anleihen mit halbjährlichen Coupons angewandt.

§ 3. In den Kursformeln sind  $x$  und  $x_{(2)}$  explicite als Funktionen der übrigen Grössen ausgedrückt. Der reelle Zinsfuss  $r$  ist jedoch in der Regel nicht explicite ausdrückbar. Der Wert von  $r$  kann deshalb gewöhnlich nicht exakt berechnet werden, muss vielmehr näherungsweise durch Interpolation gefunden werden.

Die für verschiedene, in den Formeln vorkommende Zinsfunktionen<sup>2)</sup> bestehenden Tabellen sind gute Hilfsmittel. Schon einige für den Schulgebrauch bestimmte Logarithmentafeln enthalten Tabellen der Werte von  $A_{\overline{n}|}$ . In weniger kurzgefassten Tabellenwerken, z.B. dem von W. M. J. WERKER<sup>3)</sup>, findet man auch

Tabellen der Grössen  $a_{\overline{n}|}$  und  $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ . VAN HAAFTEN's Lehrbuch enthält

Tabellen der Grössen  $\frac{1}{n} a_{\overline{n}|}$ <sup>4)</sup> und s<sup>5)</sup>.

Noch grösseren Nutzen kann man von den Tabellen haben, die für die allgemeinen Kursformeln (1) und (8) angefertigt sind.

<sup>1)</sup> Den Beweis findet man bei J. HAGE. Koersberekening. NYGH & VAN DITMAR. Rotterdam 1927. p. 54.

<sup>2)</sup> d.h. Funktionen von Zins und Zeit.

<sup>3)</sup> Die zusammengesetzte Zinsen- und Zeitrenten- oder Annuitätenrechnung. Handbuch zur Lösung von Aufgaben etc. Mit fünf Haupttafeln. J. L. BEYERS. Utrecht. PUTTKAMMER & MÜHLBRECHT. Berlin 1893. 2 Bde.

<sup>4)</sup> Leerboek der intrestrekening. p. 610. Ausführlicher in Beschouwingen over politieke rekenkunde. Dissertation der Universität Utrecht 1912. p. 114.

<sup>5)</sup> Leerboek der intrestrekening. p. 618.

Diese Tabellen, die ebenfalls vom letztgenannten Verfasser herühren<sup>1)</sup>, liefern den Wert von  $x$  oder  $x_{(2)}$ , wenn die Grösse  $H$  bekannt ist. Nur für Annuitätsanleihen mit jährlicher Couponfälligkeit ist die Berechnung mit Hilfe der Formel (5) einfacher.

Auch für die speziellen Kursformeln gibt es Tabellen. Mit Ausnahme der Formeln (2) und (9) sind die Kursformeln Beziehungen zwischen den Grössen  $x$  oder  $x_{(2)}$ ,  $i$  oder  $j$ ,  $r$  und  $n$ , sodass die entsprechenden Tabellen dreidimensional sind. Gewöhnlich verfährt man folgendermassen: Man wählt bestimmte runde Werte des nominellen Zinsfusses und reduziert dadurch die Kursformel für jeden dieser festen Werte von  $i$  auf eine Beziehung zwischen drei Veränderlichen. Für diese Beziehung konstruiert man dann (für jeden der gewählten Werte von  $i$ ) eine zweidimensionale Tabelle, und zwar so, dass jede Tabelle für die ganzzahligen Werte von  $n$  und für runde Werte von  $r$  den zugehörigen Kurs angibt. VAN DIJKE's Tabellen<sup>2)</sup> beziehen sich ebenso wie die von JOHNSON, STONE, CROSS UND KIRCHER<sup>3)</sup> auf Anleihen, die auf einmal rückzahlbar sind, und setzen sowohl für den nominellen als auch für den reellen Zins halbjährliche Fälligkeit voraus. Das Werk von HUSS und HAGSTRÖM<sup>4)</sup> enthält Tabellen für auf einmal rückzahlbare Anleihen, Annuitätsanleihen und nicht rückzahlbare Anleihen. Dabei wird halbjährliche Fälligkeit des nominellen Zinses und jährliche Fälligkeit des reellen Zinses vorausgesetzt. Die Tabellen gelten also für die Kursformeln (9), (10) und (12). Einige Nebentafeln enthalten Hilfszahlen für die Berechnung der Kurse von Anleihen mit jährlicher Fälligkeit des nominellen Zinses aus den Kursen für halbjährliche Fälligkeit und für die Ableitung des Kurses einer Agio-Anleihe aus dem einer à pari rückzahlbaren Anleihe vom gleichen Typus. Für die in gleichen Raten tilgbare Anleihe mit halbjährlicher Fälligkeit des nominellen und des reellen Zinses stellte ROLLINS<sup>5)</sup> eine Tabelle zusammen. VAN HAAFTEN

1) Leerboek der intrestrekening. p. 600 und p. 620.

2) Complete Bond Value Tables. The Financial Press. New York 1923.

3) Yields of Bonds and Stocks. PRENTICE-HALL, Inc. New York 1923.

4) Bond Values. P. A. NORSTEDT & SÖNER. Stockholm 1929.

5) Tables showing the net return from Serial and Instalment Bonds. ROUTLEDGE & SONS. London. (Ohne Jahreszahl).



gibt Tabellen für die Kursformeln (2) <sup>1)</sup> und (9) <sup>2)</sup>, sowie sehr kurzgefasste Tabellen für auf einmal rückzahlbare Anleihen <sup>3)</sup>, in gleichen Tilgungsraten rückzahlbare Anleihen <sup>4)</sup> und für Annuitätsanleihen <sup>5)</sup>, und zwar für jährliche Couponfälligkeit.

Wenn man mit den Kurstabellen brauchbare Resultate erhalten will, hat man bei der Benutzung Folgendes zu berücksichtigen:

*Kursbestimmung.* — Der Kurs einer nicht rückzahlbaren Anleihe ist unmittelbar in den Tabellen zu finden. Muss Couponsteuer berücksichtigt werden, d.h. beträgt der nominelle Zins in Wirklichkeit  $i(1 - \frac{p}{100})$ , so muss der für  $i$  geltende Kurs um  $p\%$  vermindert werden.

Sind der nominelle und der reelle Zins und die Laufzeit  $n-u$  gegeben, so findet man den Kurs der auf einmal rückzahlbaren Anleihe aus den Tabellenwerten  $x_{n-1}$  und  $x_n$  mit Hilfe der Formel

$$(16) \quad \dots \quad x_{n-u} = x_n + u(x_{n-1} - x_n),$$

weil für diesen Anleihentyp lineare Interpolation den genauen Wert liefert.

Couponsteuer kann in diesem Falle so berücksichtigt werden, dass man den Kurs in der angegebenen Weise noch einmal berechnet für den benachbarten Wert des nominellen Zinses und dann zwischen den beiden Kursen interpoliert.

Handelt es sich um eine in gleichen Raten tilgbare Anleihe oder um eine Annuitätsanleihe, so sucht man in der Tabelle den Kurswert  $x_n$  und berechnet  $x_{n-u}$  mit der Formel

$$(15) \quad \dots \quad x_{n-u} = (1 + ur)x_n - ui.$$

Ist auch hierbei Couponsteuer zu berücksichtigen, so sucht man in der Tabelle die Werte von  $x_n$  für die beiden benachbarten Werte von  $i$ , berechnet dann durch Interpolation den Wert von

<sup>1)</sup> Leerboek der intrestrekening. p. 599.

<sup>2)</sup> " " " p. 619.

<sup>3)</sup> " " " p. 630.

<sup>4)</sup> " " " p. 631.

<sup>5)</sup> " " " p. 632.

$x_n$ , der zum nominellen Zinsfuss  $i(1 - \frac{p}{100})$  gehört, und bestimmt endlich mit Hilfe der Formel (15) den gesuchten Kurs  $x_{n-u}$ .

*Bestimmung der Rentabilität.* — Für eine nicht rückzahlbare Anleihe mit dem Kurse  $x$  sucht man in der für den gegebenen nominellen Zinsfuss geltenden Tabelle zwei benachbarte Kurswerte  $x'$  und  $x''$ , sodass  $x' < x < x''$  ist. Gehört dann zum Kurse  $x'$  der reelle Zinsfuss  $r_1$  und zum Kurse  $x''$  der reelle Zinsfuss  $r_2$ , so findet man den zum Kurse  $x$  gehörenden reellen Zinsfuss  $r$  durch Interpolation zwischen  $r_1$  und  $r_2$ .

Man berücksichtigt  $p\%$  Couponsteuer, indem man den wie oben berechneten reellen Zinsfuss um  $p\%$  vermindert.

Handelt es sich um einen der andern Anleihetypen, so schätzt man an Hand der Tabelle zwei zur Laufzeit  $n$  gehörende Werte  $r_1$  und  $r_2$  ab, zwischen denen, wie man vermutet, der gesuchte reelle Zinsfuss liegen wird. Danach bestimmt man den Kurs  $x'_{n-u}$ , der zu  $r_1$ , und den Kurs  $x''_{n-u}$ , der zu  $r_2$  gehört. Für auf einmal rückzahlbare Anleihen benutzt man dabei Formel (16), für in gleichen Raten tilgbare Anleihen und für Annuitätsanleihen Formel (15). Endlich berechnet man den gesuchten reellen Zinsfuss mit Hilfe der Beziehung

$$(17) \quad . . . . r = r_1 + \frac{x'_{n-u} - x}{x'_{n-u} - x''_{n-u}} (r_2 - r_1).$$

Couponsteuer wird berücksichtigt, indem man den reellen Zinsfuss für den benachbarten Wert des nominellen Zinsfusses noch einmal berechnet und dann interpoliert.

Alle Daten, die eine Kurstabelle enthält, können auf einem einzigen Blatt vereinigt werden, wenn es gelingt, für die betreffende spezielle Kursformel ein Nomogramm zu entwerfen. Da eine solche graphische Kurstafel Interpolation *mit dem Auge* ermöglicht, ist sie in manchen Fällen der numerischen vorzuziehen, vorausgesetzt, dass die mit ihr zu erzielenden Resultate hinreichende Genauigkeit besitzen. Wir geben diese Fälle kurz an.

*In gleichen Raten tilgbare Anleihen und Annuitätsanleihen.*

Die graphische Kurstafel bietet Vorteile, wenn Couponsteuer



berücksichtigt werden muss, weil die Interpolation hinsichtlich des nominellen Zinsfusses mit dem Auge geschehen kann.

*Auf einmal rückzahlbare Anleihen.*

Die graphische Kurstafel verdient stets den Vorzug, weil die Interpolation sowohl hinsichtlich des nominellen Zinsfusses als auch hinsichtlich der Laufzeit mit dem Auge geschieht.

*Nicht rückzahlbare Anleihen.*

Die zwar wenig umfangreichen Berechnungen, die bei Benutzung der numerischen Tafel erforderlich sind, fallen beim Gebrauch der graphischen Tafel fort.

Es ist begreiflich, dass man versucht hat, für die speziellen Kursformeln Nomogramme oder nomographische Instrumente zu entwerfen. Was auf diesem Gebiete erreicht ist, beabsichtigen wir in Kapitel III und den folgenden Kapiteln zu besprechen. Über die Entwicklung der Grundlagen, auf denen die Konstruktion der vorhandenen nomographischen Hilfsmittel beruht, gibt es keine Literatur<sup>1)</sup>. Wir werden diese Grundlagen für jedes Nomogramm oder nomographische Instrument entwickeln. Da hierbei einige Prinzipien der Nomographie fortwährend Anwendung finden, erachten wir es wünschenswert, diese vorher (in Kapitel II), sei es auch in aller Kürze, anzugeben<sup>2)</sup>. In einem letzten Kapitel besprechen wir dann noch einige neue Nomogramme, die die Lösung von Kurs- und Rentabilitätsaufgaben vereinfachen können.

---

<sup>1)</sup> Dies gilt nicht für das in Kapitel III zu behandelnde Instrument, dessen Entwerfer, M. KRAÏTCHIK, den Konstruktionsgrundlagen einige Worte widmet in seinem Werke, *Sur quelques applications de la nomographie*. Brüssel 1918. p. 56. Vgl. auch R. SOREAU. *Nomographie ou traité des abaqués*. CHIRON. Paris 1921. t. II. p. 184. Auch gilt diese Bemerkung nicht für das Instrument, das wir in Kapitel VI besprechen. Vgl. meinen Artikel *Le tokomètre* du Dr. B. H. DE JONGH im *Verz.-Archief* XV (1934), p. (44).

<sup>2)</sup> Hierfür zogen wir besonders die Werke von M. d'OCAGNE zu Rate.

## KAPITEL II.

### Einige Grundbegriffe der Nomographie.

#### I. Funktionsskala. Scharen bezifferter Linien, bezifferter Punkte und zweifach bezifferter Punkte.

§ 4.  $f(a)$  sei eine eindeutige Funktion von  $a$ . Wir nehmen für  $a$  einen bestimmten Wert  $a_1$  an, wählen eine Längeneinheit  $\mu$ , die wir Modul nennen, und stecken auf einer gerichteten Geraden von dem festen Punkte  $O$  aus eine Strecke  $OA_1 = \mu f(a_1)$  ab. Hierbei ist also stillschweigend vorausgesetzt, dass  $f(a_1)$  reell ist. Den Punkt  $A_1$  legen wir durch einen zu  $OA_1$  senkrechten Teilstrich fest und schreiben dabei die Zahl  $a_1$ . Dann setzen wir  $a = a_2$ , konstruieren die Strecke  $OA_2 = \mu f(a_2)$  und notieren bei dem Teilstrich  $A_2$  die Zahl  $a_2$  u.s.w. Im allgemeinen lässt man  $a$  mit constanten Differenzen fortschreiten. So entsteht eine Skala von  $f(a)$ . Vielfache Anwendung finden die reguläre Skala, wobei  $f(a) = a$  ist, und die logarithmische Skala, wobei  $f(a) = \log a$  ist.

$$(1) \quad \dots \dots \dots F(x, y, a) = 0$$

sei eine Gleichung, worin  $x$  und  $y$  laufende Punktkoordinaten darstellen und  $a$  ein beliebiger, in einem bestimmten Intervall stetig verlaufender Parameter ist. Wir setzen voraus, dass zu jedem Werte von  $a$  nur eine und zwar eine reelle Linie gehört. Gibt man nun  $a$  einen bestimmten Wert, so kann man die dadurch bestimmte Linie konstruieren und mit dem zugehörigen Werte von  $a$  bezeichnen. Tut man dies für verschiedene Werte von  $a$ , wobei man Werte wählt, die durch runde Zahlen anzugeben sind, so erhält man, was d'OCAGNE<sup>1)</sup> eine *Schar bezifferter Linien* genannt hat. Die Linien, die bei Interpolation mit dem Auge zwischen den

<sup>1)</sup> Traité de nomographie. GAUTHIER—VILLARS, Paris 1921<sup>2</sup>. p. 31. Einige Autoren sprechen von *Isoplethen*, welcher Name von C. A. VOGLER vorgeschlagen wird. Vergl. dessen Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und deren Gebrauch. ERNST & KORN. Berlin 1877. p. 7.



wirklich gezeichneten gedacht werden können, werden auch als zu der Linienschar gehörend betrachtet. Da die Gleichung (1) im allgemeinen in  $a$  nicht linear ist, kann es vorkommen, dass zu einer Linie der Schar (1) mehrere Werte von  $a$  gehören.

Substituiert man in den eindeutigen Funktionen

$$x = g(a) \quad y = h(a)$$

für  $a$  einen bestimmten Wert, so bestimmen sie einen Punkt. Dieser als reell vorausgesetzte Punkt kann in einer Zeichnung z.B. durch einen gezeichneten Punkt angegeben werden, neben den man den entsprechenden Wert von  $a$  schreibt. Tut man dies für verschiedene Werte von  $a$ , so erhält man eine *Schar bezifferter Punkte*. Hierbei kann es vorkommen, dass zu einem Punkte mehrere Werte von  $a$  gehören. Die bezifferten Punkte können als Teilpunkte einer Skala gedeutet werden. Die Gleichung des Trägers erhält man durch Elimination von  $a$  aus  $x = g(a)$  und  $y = h(a)$ .

Es ist auch möglich, eine Punktschar mit Hilfe zweier Parameter zu definieren. Da nämlich jede der Gleichungen

$$(1) \quad \dots \dots \dots F(x, y, a) = 0$$

$$(2) \quad \dots \dots \dots G(x, y, \beta) = 0$$

eine Schar bezifferter Linien bestimmt, definieren sie zusammen eine Punktschar, nämlich die der Schnittpunkte der Linien der Schar (1) mit den Linien der Schar (2). Wenn (1) und (2) in  $a$  und  $\beta$  eindeutig sind, gehört zu jedem Punkte ein bestimmter Wert sowohl von  $a$  wie von  $\beta$ , sodass jeder Punkt *zweifach beziffert* ist. Die Koordinaten eines zu der durch (1) und (2) bestimmten Punktschar gehörenden Punktes findet man durch Auflösung von (1) und (2) nach  $x$  und  $y$ , sodass man schreiben kann

$$x = \varphi(a, \beta) \quad y = \psi(a, \beta).$$

## II. Netztafeln.

### A. Gleichungen mit drei Veränderlichen.

§ 5. Besteht zwischen drei Veränderlichen die Beziehung

$$(3) \quad \dots \dots \dots F(a, \beta, \gamma) = 0$$

und stellen die Gleichungen

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_1(x, y, \alpha) = 0$$

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_2(x, y, \beta) = 0$$

zwei beliebige Scharen bezifferter Linien dar, so gelangt man durch Elimination von  $\alpha$  und  $\beta$  aus (3), (4) und (5) zu einer dritten Schar bezifferter Linien, die bestimmt ist durch eine Gleichung

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F_3(x, y, \gamma) = 0.$$

Für jede von zwei der drei Veränderlichen in Gleichung (3), z.B. für  $\alpha$  und  $\beta$ , nimmt man Grenzen an, innerhalb derer sie stetig verlaufen. Wir setzen voraus, dass zu jedem hiernach für  $\alpha$  bzw.  $\beta$  möglichen Werte nur eine und zwar eine reelle Linie der Schar (4) bzw. (5) gehört. Ferner nehmen wir noch an, dass durch jeden Schnittpunkt einer Linie der Schar (4) mit einer Linie der Schar (5) eine reelle Linie der Schar (6) geht. Man denke sich nun die drei Scharen (4), (5) und (6) gezeichnet. Alle Linien sind beziffert. Einem Punkte, durch den von jeder der drei Scharen eine Linie geht, sind dann drei zu diesen Linien gehörende, mit der Bezifferung der Linien übereinstimmende Zahlen als Werte von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  zugeordnet, die gleichzeitig der Gleichung (3) genügen. Eine solche Zeichnung (Nomogramm), aus der man zusammengehörige Werte der drei Veränderlichen unmittelbar ablesen kann, nennt man eine *Netztafel*.

Das Nomogramm erhält eine für das Ablesen zweckmässige Form, wenn man für die beliebigen Scharen (4) und (5) Scharen von zur  $Y$ -Achse bzw.  $X$ -Achse des Koordinatensystems parallelen Geraden wählt. Die Gleichungen dieser Scharen sind

$$(4^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = \mu_1 G_1(\alpha)$$

$$(5^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \mu_2 G_2(\beta),$$

worin  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Moduln sind. In einem cartesischen Koordinatensystem definieren (4\*) und (5\*) ein Netz mit rechteckigen oder parallelogrammförmigen Maschen. Auf dies „Stramin“ wird die dritte Schar bezifferter Linien gelegt.

Man sagt, dass eine Gleichung, die durch ein aus drei Scharen



bezahlter Geraden aufgebautes Nomogramm dargestellt werden kann, *anamorphosierbar* oder *verstreckbar* ist. Die Bedingung für diese Eigenschaft ist einfach herzuleiten:

Eine Gleichung

$$(3) \quad \dots \dots \dots F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

ist verstreckbar, wenn sie geschrieben werden kann in der Form

$$(7) \quad \dots \dots \dots \begin{vmatrix} f_1(\alpha) & g_1(\alpha) & h_1(\alpha) \\ f_2(\beta) & g_2(\beta) & h_2(\beta) \\ f_3(\gamma) & g_3(\gamma) & h_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Untersuchung einer gegebenen Gleichung (3) auf ihre Verstreckbarkeit sucht man sie in die Form

$$(8) \quad \dots \dots H_1(\alpha, \beta) k_1(\gamma) + H_2(\alpha, \beta) k_2(\gamma) + 1 = 0$$

zu bringen und setzt nun

$$H_1(\alpha, \beta) = x \quad H_2(\alpha, \beta) = y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen bildet man durch Elimination von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  zwei neue. Sind diese linear in  $x$  und  $y$ , so bilden sie mit der Gleichung

$$(8^*) \quad \dots \dots \dots x k_1(\gamma) + y k_2(\gamma) + 1 = 0$$

die Gleichungen der drei Geradenscharen, wodurch die Gleichung (3) dargestellt werden kann. Sind sie jedoch nicht linear, so ist (3) in der Regel nicht verstreckbar. Aus Untersuchungen von R. SOREAU <sup>1)</sup> geht hervor, dass Verstreckbarkeit sicher nicht vorhanden ist, wenn in den in (8) vorkommenden Ausdrücken  $H_1(\alpha, \beta)$  und  $H_2(\alpha, \beta)$  die Funktionen von  $\alpha$  und  $\beta$  nicht voneinander zu trennen sind.

## B. Gleichungen mit vier Veränderlichen.

### § 6. Wenn eine Gleichung

$$(9) \quad \dots \dots \dots F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

<sup>1)</sup> R. SOREAU. l.c. t. II. p. 60.

auf die Form

$$(10) \quad \dots \dots \dots f(a, \beta) = g(\gamma, \delta)$$

gebracht werden kann, so kann man

$$f(a, \beta) = \zeta \quad \text{und} \quad g(\gamma, \delta) = \zeta$$

setzen, wobei  $\zeta$  eine Hilfsvariable ist. Jede dieser beiden Beziehungen kann durch eine Netztafel dargestellt werden, wobei jeweils zwei Scharen bezifferter Linien beliebig sind. Man verbindet die Nomogramme miteinander, indem man dafür sorgt, dass eine der bezifferten Linienscharen, z.B. die, welche sich auf  $\zeta$  bezieht, beiden gemeinsam ist. Kann man Gleichung (9) nicht in die Form (10) überführen, so verfährt man bisweilen folgendermassen. Man lässt eine der Veränderlichen, z.B.  $\delta$ , eine Reihe bestimmter Werte durchlaufen. Auf diese Weise erhält man ein System von Beziehungen zwischen drei Veränderlichen und kann man für jede dieser Beziehungen eine Netztafel anfertigen. Der grosse Nachteil dieser Methode ist, dass Interpolation hinsichtlich  $\delta$  nicht mit dem Auge geschehen kann.

### III. Fluchtentafeln.

#### A. Gleichungen mit drei Veränderlichen.

§ 7. Im Jahre 1884 erschien ein Artikel von D'OCAGNE mit dem Titel „Procédé nouveau de calcul graphique“<sup>1)</sup>, aus dem hervorging, dass der Verfasser den glücklichen Gedanken gehabt hatte, ein aus drei Geradenscharen bestehendes Nomogramm einer Gleichung

$$(3) \quad \dots \dots \dots F(a, \beta, \gamma) = 0$$

einer Dualitätstransformation zu unterwerfen. Die neue Figur enthält für jede Veränderliche eine auf einer Linie (Träger) liegende Schar bezifferter Punkte, sodass drei Punktskalen entstehen. Je drei auf einer Geraden (Fluchtlinie) liegende (collineare) Punkte der drei Skalen sind mit drei Werten  $a$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  beziffert,

<sup>1)</sup> Ann. des Ponts et Chaussées, 6e série, t. 8. DUNOD. Paris 1884. p. 531.



die gleichzeitig die Gleichung (3) befriedigen. Das so entstandene Nomogramm kann deshalb *Fluchtentafel* genannt werden. Zur Bestimmung der auf einer Geraden (dem Ablesindex) liegenden drei Skalenpunkte benutzt man einen dünnen Faden oder einen Streifen aus durchsichtigem Material, auf dem eine Gerade eingraviert ist.

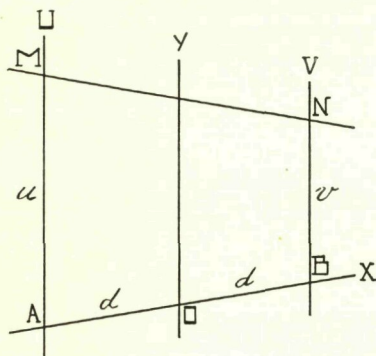


Fig. 1

Um die Dualitätstransformation bequem ausführen zu können, benutzte d'OCAGNE für diesen Zweck von ihm selbst erfundene Koordinaten, die er Parallelkoordinaten (*coordonnées parallèles*)<sup>1)</sup> nannte. Man hat hierunter Folgendes zu verstehen: Auf zwei parallelen, gerichteten Geraden,  $AU$  und  $BV$  (Fig. 1), den Achsen

des Systems, wählt man je einen Anfangspunkt ( $A$  bzw.  $B$ ). Unter den Koordinaten einer Geraden  $MN$  versteht man dann das Streckenpaar  $(u, v)$ , das sie auf den Achsen abschneidet. In einem solchen Koordinatensystem wird durch eine lineare Gleichung

$$au + bv + c = 0$$

ein Punkt definiert. Ferner kann man durch einfache Überlegungen zeigen, dass die folgenden Aussagen gelten:

Eine aus drei Geradenscharen bestehende Netztafel wird einer Dualitätstransformation unterworfen, indem man in der Gleichung

<sup>1)</sup> Die vollständige Theorie dieser Koordinaten erschien zuerst in einem von ihm herrührenden Artikel unter dem Titel „*Etude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan: coordonnées parallèles et coordonnées axiales*“. (Nouv. ann. de Math. 3e série. t. III. Paris 1884. p. 410, 456, 516). In seinem Werke „*Le calcul simplifié*“, GAUTHIER—VILLARS. Paris 1928<sup>3</sup> teilt d'OCAGNE auf Seite 128 mit, später bemerkt zu haben, dass CHASLES schon im Jahre 1829 an Parallelkoordinaten gedacht habe. Tatsächlich hat dieser mit einigen Worten das Prinzip dieses Koordinatensystems angegeben. Vergl. Corr. math. et phys. publiée par A. QUETELET. t. VI. Brüssel 1830. p. 81. Um Verwirrung zu vermeiden, werden wir die „*coordonnées parallèles*“ mit dem Namen „d'OCAGNE'sche Koordinaten“ bezeichnen.

chung jeder Linienschar die cartesischen Koordinaten durch die D'OCAGNE'schen Koordinaten  $u$  und  $v$  ersetzt;

Eine gegebene Gleichung

$$(3) \quad \dots \dots \dots F(a, \beta, \gamma) = 0$$

kann nur dann durch eine Fluchtentafel dargestellt werden, wenn sie auf die Form

$$(7) \quad \dots \dots \dots \begin{vmatrix} f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ f_2(\beta) & g_2(\beta) & h_2(\beta) \\ f_3(\gamma) & g_3(\gamma) & h_3(\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

gebracht werden kann;

Wenn dies der Fall ist, werden in dem cartesischen Koordinatensystem  $XOY$  (Fig. 1) die bezifferten Punktscharen bestimmt durch Gleichungen der Form

$$(11) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} x = \frac{\mu_1 g_1(a) - \mu_2 f_1(a)}{\mu_1 g_1(a) + \mu_2 f_1(a)} d \\ y = - \frac{\mu_1 \mu_2 h_1(a)}{\mu_1 g_1(a) + \mu_2 f_1(a)}. \end{cases}$$

Die Moduln  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  gelten für die  $X$ -Achse bzw. die  $Y$ -Achse. Die entsprechenden Gleichungen für  $\beta$  bzw.  $\gamma$  findet man, indem man in den Gleichungen (11) die Funktionen  $g_1(a)$ ,  $f_1(a)$  und  $h_1(a)$  ersetzt durch  $g_2(\beta)$ ,  $f_2(\beta)$  und  $h_2(\beta)$  bzw. durch  $g_3(\gamma)$ ,  $f_3(\gamma)$  und  $h_3(\gamma)$ .

Fluchtentafeln bieten gegenüber Netztafeln den Vorteil grösserer Übersichtlichkeit, grösserer Ablesegenauigkeit und geringerer Wahrscheinlichkeit von Irrtümern. Ausserdem lassen sie sich schneller verfertigen.

## B. Gleichungen mit vier Veränderlichen.

§ 8. Kann eine gegebene Gleichung

$$(9) \quad \dots \dots \dots F(a, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

auf die Form

$$(10) \quad \dots \dots \dots f(a, \beta) = g(\gamma, \delta)$$



gebracht werden, so kann man wieder

$$f(\alpha, \beta) = \zeta \quad \text{und} \quad g(\gamma, \delta) = \zeta$$

setzen und diese Beziehungen häufig durch je eine Fluchtentafel darstellen, welche beiden Tafeln man im Allgemeinen durch die Wahl einer gemeinsamen  $\zeta$ -Skala miteinander verbinden kann.

Oft kann man Gleichungen, die sich nicht auf die Form (10) bringen lassen, doch durch eine Fluchtentafel darstellen, indem man eine der bezifferten Punktscharen mit Hilfe zweier Parameter definiert. Die Scharen

$$F_1(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y, \beta) = 0$$

bilden ein Netz, und jedes Wertepaar  $(\alpha_1, \beta_1)$  definiert einen Punkt, nämlich den Schnittpunkt der beiden mit diesen bestimmten Werten bezifferten Linien. In Zusammenhänge mit bereits erwähnten Ergebnissen kann man nun sagen:

Eine Beziehung

$$(9) \quad \dots \dots \dots F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0.$$

die sich auf die Form

$$(12) \quad \dots \dots \dots \begin{vmatrix} f_1(\alpha) & g_1(\alpha) & h_1(\alpha) \\ f_2(\beta) & g_2(\beta) & h_2(\beta) \\ f_3(\gamma, \delta) & g_3(\gamma, \delta) & h_3(\gamma, \delta) \end{vmatrix} = 0$$

bringen lässt, kann man durch eine Fluchtentafel darstellen.

Die Definitionsgleichungen der bezifferten Punktscharen bildet man wie die Gleichungen (11).

#### IV. Nomogramme mit beweglichen bezifferten Scharen.

##### A. Gleitende bezifferte Scharen.

§ 9. Wir denken uns zwei Ebenen, eine feste  $\pi$  und eine bewegliche  $\pi'$ . In jeder dieser Ebenen nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, und zwar  $XOY$  in  $\pi$  und  $X'O'Y'$  in  $\pi'$ . Wir lassen nun für  $\pi'$  nur solche Bewegungen gegenüber  $\pi$  zu, bei denen die Achse  $O'X'$  auf der Achse  $OX$  entlanggleitet.



Die Achse  $OX$  sei der Träger einer Skala, die durch die Gleichung

$$x = \mu f(a)$$

definiert ist, worin  $\mu$  eine beliebig gewählte Längeneinheit und  $a$  ein Parameter ist.  $O'X'$  trage eine durch

$$x' = \mu g(\beta)$$

definierte Skala. Wenn nun die Punkte  $A$  bzw.  $B$  (Fig. 2) von

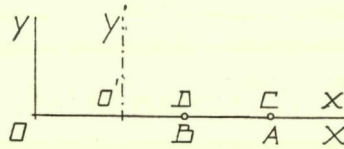


Fig. 2

$OX$  zusammenfallen mit den Punkten  $C$  bzw.  $D$  von  $O'X'$  und  $A, B, C$  und  $D$  in dieser Reihenfolge beziffert sind mit den Werten  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  und  $\beta_2$ , so gilt

$$(13) \quad \dots \dots f(\alpha_1) - f(\alpha_2) = g(\beta_1) - g(\beta_2).$$

Jede Gleichung, die sich in dieser Form schreiben lässt, ist darstellbar durch ein Nomogramm, das aus zwei Skalen auf geraden, aneinander entlanggleitenden Trägern besteht.

Bei der Anwendung verfährt man häufig so, dass man in einem Lineal eine Längsfurche ausspart, in der ein Schieber hin- und herbewegt werden kann wie bei einem Rechenschieber. Auf der Oberfläche des Lineals bringt man die Skala  $x = \mu f(a)$  an, auf der des Schiebers die Skala  $x' = \mu g(\beta)$ .

Nach dieser besonderen Anwendung gehen wir nun zu einer allgemeineren Betrachtung über. Wir konstruieren zu diesem Zwecke in  $\pi$  zwei Scharen bezifferter Punkte. Um den Überlegungen eine festere Form zu geben, nehmen wir an, dass diese Scharen definiert seien durch die Gleichungen

$$(14) \quad \dots \dots x = f_1(a) \quad y = g_1(a) \quad (P_1)$$

$$(15) \quad \dots \dots x = f_2(\beta) \quad y = g_2(\beta) \quad (P_2)$$

Ferner konstruieren wir in  $\pi'$  zwei Scharen bezifferter Linien, deren Gleichungen seien

$$(16) \quad . . . . . F_1(x', y', \gamma) = 0 \quad (l'_1)$$

$$(17) \quad . . . . . F_2(x', y', \delta) = 0 \quad (l'_2).$$

Gibt man den Parametern  $\alpha$  bzw.  $\beta$  bzw.  $\gamma$  die bestimmten Werte  $\alpha_1$  bzw.  $\beta_1$  bzw.  $\gamma_1$ , so bestimmen die Gleichungen (14) bzw. (15) bzw. (16) einen Punkt  $P_1$  bzw. einen Punkt  $P_2$  bzw. eine Linie  $l'_1$ . Die Ebene  $\pi'$  wird nun in der vorgeschriebenen Weise gegen  $\pi$  verschoben, bis  $P_1$  auf  $l'_1$  liegt. Bei diesem Stande wird  $P_2$  auf einer Linie der Schar (17) liegen, deren Bezifferung den zugehörigen Wert von  $\delta$  angibt.

Um zu der dargestellten Gleichung zu gelangen, bestimmt man die Gleichungen der Scharen (16) und (17) im Koordinatensystem  $XOY$ . Hierzu benutzt man die Transformationsformeln:

$$x' = x - a \quad y' = y,$$

worin  $a$  die Abscisse von  $O'$  in  $XOY$  ist. Man findet dann:

$$F_1(x - a, y, \gamma) = 0 \quad (l_1)$$

$$F_2(x - a, y, \delta) = 0 \quad (l_2).$$

Die erste Gleichung wird befriedigt durch die Werte von  $x$  und  $y$  aus (14), die zweite durch die aus (15). Man hat also:

$$F_1\{f_1(\alpha) - a, g_1(\alpha), \gamma\} = 0$$

$$F_2\{f_2(\beta) - a, g_2(\beta), \delta\} = 0.$$

Eliminiert man hieraus  $a$ , so erhält man die gesuchte Gleichung.

Bei der Anfertigung des Nomogramms verwendet man für die bewegliche Ebene durchsichtiges Papier oder ein Celluloidblättchen.

## B. Gerichtete bezifferte Scharen.

§ 10. Man kann auch der Bewegung von  $\pi'$  gegen  $\pi$  etwas mehr Freiheit geben und nur vorschreiben, dass  $O'X'$  mit  $OX$  parallel bleibt. In diesem Falle konstruiert man drei bezifferte Punktscharen auf der festen Ebene und drei bezifferte Linien-

scharen auf  $\pi'$ . Nehmen wir an, dass diese Scharen bestimmt seien durch die Gleichungen

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{lll} x = f_1(\alpha) & y = g_1(\alpha) & (P_1) \\ x = f_2(\beta) & y = g_2(\beta) & (P_2) \\ x = f_3(\gamma) & y = g_3(\gamma) & (P_3) \end{array} \right.$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} F_1(x', y', \delta) = 0 & (l'_1) \\ F_2(x', y', \varepsilon) = 0 & (l'_2) \\ F_3(x', y', \zeta) = 0 & (l'_3) \end{array} \right.$$

Die Ebene  $\pi'$  wird nun in der vorgeschriebenen Weise bewegt, bis zwei bestimmte Linien von  $\pi'$ , die zu zwei verschiedenen Scharen gehören, durch zwei bestimmte, ebenfalls zu verschiedenen Scharen gehörende Punkte von  $\pi$  gehen. Ein bestimmter Punkt der dritten Schar von  $\pi$  liegt dann auf einer Linie der dritten Schar von  $\pi'$ . Der zu dieser Linie gehörende Wert der Veränderlichen kann abgelesen werden.

Will man die dargestellte Beziehung ableiten, so muss man die Scharen (19) zunächst auf  $XOY$  beziehen. Die Transformationsformeln sind:

$$x' = x - a \quad y' = y - b,$$

worin  $a$  und  $b$  die Koordinaten von  $O'$  in  $XOY$  sind. Man erhält dann die Gleichungen:

$$F_1(x - a, y - b, \delta) = 0$$

$$F_2(x - a, y - b, \varepsilon) = 0$$

$$F_3(x - a, y - b, \zeta) = 0.$$

Hierin ersetzt man  $x$  und  $y$  durch die Werte aus (18) und gelangt so zu

$$F_1\{f_1(\alpha) - a, g_1(\alpha) - b, \delta\} = 0$$

$$F_2\{f_2(\beta) - a, g_2(\beta) - b, \varepsilon\} = 0$$

$$F_3\{f_3(\gamma) - a, g_3(\gamma) - b, \zeta\} = 0.$$



Durch Elimination von  $a$  und  $b$  erhält man die dargestellte Beziehung.

### V. Über die Genauigkeit nomographischer Ablesungen.

§ 11. Die Behandlung dieses Gegenstandes bei den verschiedenen Autoren lässt an Ausführlichkeit zu wünschen übrig. Einige geben für die gebräuchlichen Nomogrammgrößen an, in wieviel brauchbaren Ziffern das Resultat erhalten werden kann. Die meisten sagen etwas über die Schätzungsfehler, die bei Interpolation mit dem Auge zu berücksichtigen sind. So teilt D'OCAGNE<sup>1)</sup> mit, dass Nomogramme nicht mehr als drei, in einzelnen Fällen vier, brauchbare Resultatziffern liefern können. Nach SOREAU<sup>2)</sup> beträgt der relative Fehler bei mit Fluchtentafeln erhaltenen Resultaten 0,001. Für finanzielle Berechnungen halten beide Autoren diese Genauigkeit nicht für ausreichend. Trotzdem kann nach ihrer Meinung die Nomographie auch auf diesem Gebiete wichtige Dienste leisten, weil sie schnell Näherungswerte liefert. Über die Genauigkeit der Ablesung bei Interpolation weichen die Angaben der verschiedenen Autoren ziemlich stark voneinander ab. VOGLER<sup>3)</sup> teilt mit, dass die Schätzungsfehler eines normalen und einigermaßen geübten Auges bei Intervallen von 1 bis 2 mm die Grösse von 0,05 mm nicht übersteigen; dagegen ist D'OCAGNE<sup>4)</sup> der Meinung, dass die Ablesungen eines geübten Schätzers bei Intervallen von 1 mm bis auf 0,20 bis 0,25 mm genau sind.

Hiermit ist so ziemlich alles erwähnt, was man in der Literatur über dieses Thema findet. Wir werden etwas tiefer darauf eingehen und zunächst die Schätzungsfehler beim Ablesen des Resultates ins Auge fassen. Diese Fehler sind subjektiver Art. Die Vermutung liegt nahe, dass die relativen Schätzungsfehler abhängig sind von der Grösse des Intervalls, von dem ein Teil abgeschätzt werden muss; selbstverständlich ist es leichter, ein Fünftel einer Strecke anzugeben, wenn die Länge der Strecke ein Zentimeter

1) Le calcul simplifié. p. 103.

Calcul graphique et nomographie. DOIN. Paris 1924<sup>3</sup>. p. 25.

2) SOREAU. l.c. t. I. p. 12.

3) VOGLER. l.c. p. 63.

4) Calcul graphique et nomographie. p. 22.

beträgt, als wenn sie nur ein Millimeter ist. Aus Untersuchungen von C. REINHERTZ<sup>1)</sup> und G. KUMMER<sup>2)</sup> ergab sich, dass der Zusammenhang zwischen Intervallgrösse und relativem Schätzungsfehler durch eine Beziehung von der Form

$$m = \frac{a}{\sqrt{J}}$$

dargestellt werden kann, worin  $m$  der mittlere Wert des relativen Schätzungsfehlers,  $J$  die Grösse des Intervalls und  $a$  eine Konstante ist. Für geübte Zeichner fand KUMMER den Wert  $a = 0,026$ . REINHERTZ berechnete aus eigenen Beobachtungen  $a = 0,075$ . Aus Beobachtungen des Ingenieurs F. J. DORST<sup>3)</sup> ist der Wert  $a = 0,057$  abzuleiten. Diese Werte von  $a$  weichen ziemlich stark voneinander ab, aber selbst wenn sie besser übereinstimmen würden, könnte man sie nicht ohne weiteres als gültig annehmen für Schätzungen von Personen, die für die Benutzung von Nomogrammen für die Lösung von Kurs- und Rentabilitätsaufgaben in Betracht kommen. Wir haben einige im Schätzen kleiner Abstände ungeschulte Personen veranlasst, einige Ablesungen zu verrichten. Es handelte sich um reguläre Skalen mit Teilstrichen von bei gut ausgeführten Nomogrammen üblicher Dicke. Die Intervallgrössen waren 1; 1,5; 2; 2,5 und 3 Millimeter; die Schätzung bezog sich auf Zehntel des Intervalls. Für jede Intervallgrösse hatten wir 100 Schätzungen. Das Ergebnis war  $a = 0,07$ . Wenn wir für unsere Untersuchung der Genauigkeit nomographischer Resultate diesen Wert zu Grunde legen, werden wir sicher keine Gefahr laufen, die Genauigkeit zu überschätzen, denn man darf wohl annehmen, dass die ungeübten Schätzer kleinere Schätzungsfehler machen werden, sobald sie mit der Benutzung von Nomogrammen mehr vertraut geworden sind. Selbstverständlich handelt es sich

<sup>1)</sup> *Mittheilung einiger Beobachtungen über die Schätzungsgenauigkeit an Massstäben, insbesondere an Nivellirscaln.* (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1894. p. 593).

<sup>2)</sup> *Mittheilung von Beobachtungsergebnissen über die Schätzungs- und Kartierungsgenauigkeit an Massstäben und Kartierungsinstrumenten.* (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1907. p. 531, 561, 593).

<sup>3)</sup> *Über die Grösse der Beobachtungsfehler beim Ablesen eingetheilter Instrumente.* (Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 1886. p. 383).



dabei nicht um eine Schärfung des Gesichtsvermögens, sondern um die richtigere Interpretation des Netzhautbildes durch das geübtere Gehirn.

Wir werden noch, wie häufig geschieht<sup>1)</sup>, annehmen, dass der grösste vorkommende Schätzungsfehler den dreifachen Wert des mittleren Fehlers nicht übersteigt.

Übrigens sind wir der Meinung, dass man, ehe man jemand mit dem Ablesen eines Nomogramms betraut, zunächst untersuchen muss, wie gross die von ihm gemachten Schätzungsfehler sind.

§ 12. Nomogramme können so genau konstruiert werden, dass man nur auf Schätzungsfehler beim Ablesen Rücksicht zu nehmen braucht und das Nomogramm selbst als fehlerfrei betrachten kann. Um dies deutlich zu machen, werden wir die beim Zeichnen einer Skala erreichbare Genauigkeit bestimmen. Den Ort eines Teilpunktes legt man zunächst fest, indem man mit einer dünnen Nadel ein Loch in das Papier sticht. Benutzt man hierbei ein metallenes Präzisionslineal, so beträgt der mittlere Wert des Fehlers nach KUMMER<sup>2)</sup> 0,0459 mm. A. GRÜNERT<sup>3)</sup> fand beim Gebrauch eines Koordinatographen<sup>4)</sup> den Wert 0,022 mm. Wenn man dann durch den Mittelpunkt des Loches einen Bleistiftstrich zieht, kann man wieder einen Fehler erwarten, dessen mittlerer Wert 0,02 mm<sup>5)</sup> beträgt, während endlich beim Nachziehen dieses Teilstrichs mit Tusche ein Coinzidenzfehler auftritt, für dessen mittleren Wert O. EGGERT<sup>6)</sup> 0,004 mm, DORST<sup>7)</sup> 0,006 mm und W. FOERSTER<sup>8)</sup>

<sup>1)</sup> Vergl. CH. M. SCHOLS. *Landmeten en waterpassen*. Breda 1912<sup>o</sup>. p. 342.

<sup>2)</sup> KUMMER. l.c. p. 572.

<sup>3)</sup> *Conradi's Detailkoordinatograph*. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1912. p. 152).

<sup>4)</sup> Die Beschreibung eines solchen Instrumentes kann man auch finden in dem Artikel *De coördinatograaf* von J. F. A. VAN RIESSEN in *Tijdschr. v. kadaster en landmeetkunde*. 1925. p. 24.

<sup>5)</sup> KUMMER. l.c. p. 562.

<sup>6)</sup> *Die Genauigkeit der Nonienablesung*. (Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1907. p. 635).

<sup>7)</sup> DORST. l.c. p. 386.

<sup>8)</sup> *Sur le rapport entre le grossissement des microscopes et la précision des mesures micrométriques*. (Comité international des poids et mesures. Proc.-Verb. des séances de 1878. p. 227).



0,005 mm fand, das ist im Durchschnitt also 0,005 mm. Berechnet man den mittleren Wert des resultierenden Fehlers, so findet man  $M=0,05$  mm bei Benutzung eines metallenen Präzisionslineals und  $M=0,03$  mm, wenn man einen Koordinatographen zur Verfügung hat.

Man kann die Genauigkeit noch erhöhen, wenn man das Nomogramm zunächst grösser entwirft als für den Gebrauch zweckmässig ist und das Original dann in verkleinertem Massstabe reproduzieren lässt. Auf diese Weise kann man den mittleren Fehler im Ort eines Teilstrichs z.B. auf 0,01 mm reduzieren, sodass die Skala praktisch fehlerfrei ist.

Bei Fluchtentafeln darf die Ebene des Nomogramms keine Verzerrungen erleiden, wodurch gerade Linien nicht gerade bleiben würden. Wenn Papier älter wird, schrumpft es nicht unerheblich ein. Nach M. FOERSTER<sup>1)</sup> waren alte Zeichnungen wohl um 3 % geschrumpft. Das Schrumpfen geschieht in der Längsrichtung der Papierbahn weniger stark als in der Querrichtung, bei guten Papiersorten jedoch in jeder Richtung gleichmässig stark, sodass alle geraden Linien gerade bleiben. Bei einem Nomogramm, das auf starkem Papier von guter Qualität angefertigt ist, braucht man darum mit dem Schrumpfen nicht zu rechnen.

---

<sup>1)</sup> Taschenbuch f. Bauingenieure, SPRINGER, Berlin 1920<sup>3</sup>, p. 493.

### KAPITEL III.

#### Das Tokometer von M. KRAITCHIK.

§ 13. Der belgische Mathematiker M. KRAITCHIK brachte im Jahre 1914 ein Instrument in den Handel, das die Kursformel der Annuitätsanleihe auflöst. Diese wird dargestellt durch die Beziehung

$$(15) \quad x = \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|i}}$$

oder

$$(1) \quad 100 x = 100 \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Diese Formel kann mit Hilfe eines Nomogramms mit gerichteten bezifferten Scharen (§ 10) graphisch dargestellt werden. Auf der festen Ebene  $\pi$  bringt man die folgenden bezifferten Punktscharen an (Fig. 3):<sup>2)</sup>

$$(2) \quad \xi = \mu_1 \log n - c_1 \quad \eta = 0 \quad (P_1)$$

$$(3) \quad \xi = \mu_1 \log n - c_1 \quad \eta = \mu_2 \log a_{\overline{n}|r} - c_2 \quad (P_2)$$

$$(4) \quad \xi = \mu_1 \log n - c_1 \quad \eta = \mu_2 \log a_{\overline{n}|i} - c_2 \quad (P_3).$$

Hierzu sei bemerkt, dass (3) die gleiche Zeichnung liefert wie (4); da jedoch in der Praxis  $i \neq r$  ist, werden die Beziehungen (3) und (4) in einem gegebenen Falle zwei verschiedene Punkte definieren. Auf der beweglichen Ebene konstruiert man die Linien:

$$(5) \quad \xi' = 0 \quad l'_1$$

$$(6) \quad \eta' = \mu_2 \log 100 - c_3 \quad l'_2$$

<sup>1)</sup> Dies bedeutet: Gleichung (5) aus Kapitel I.

<sup>2)</sup> Die Nomogramme sind nicht vollständig konstruiert, sondern nur in den Hauptzügen angegeben.

und die Schar :

$$(7) \quad \eta' = \mu_2 \log 100 x - c_3 \quad (l'_3).$$

Hierin sind  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  beliebige Konstanten. Man bestimmt die

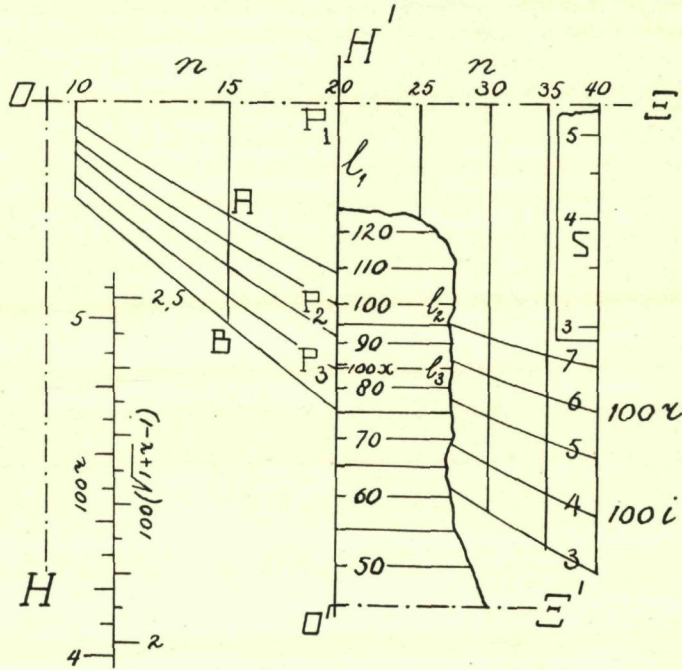


Fig. 3

Gleichungen von  $l_1$ ,  $l_2$  und  $(l_3)$  im Koordinatensystem  $\Xi OH$ . Die Transformationsformeln sind :

$$\xi' = \xi - a \quad \eta' = b - \eta,$$

worin  $a$  und  $b$  die Koordinaten von  $O'$  in  $\Xi OH$  sind. Man findet :

$$(8) \quad \xi - a = 0 \quad l_1$$

$$(9) \quad b - \eta = \mu_2 \log 100 - c_3 \quad l_2$$

$$(10) \quad b - \eta = \mu_2 \log 100 x - c_3 \quad (l_3)$$



In (8), (9) und (10) substituiert man nacheinander die Koordinaten (2), (3) und (4) von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  und erhält dann:

$$\mu_1 \log n - c_1 - a = 0$$

$$b - \mu_2 \log a_{\overline{n}|r} + c_2 = \mu_2 \log 100 - c_3$$

$$b - \mu_2 \log a_{\overline{n}|i} + c_2 = \mu_2 \log 100 x - c_3.$$

Durch Elimination von  $b$  aus den beiden letzten Gleichungen kommt man wieder zu der Beziehung (1), wodurch die Richtigkeit der Darstellung bewiesen ist. Die Kurven in Fig. 3 nennt man *Zinslinien*, die geraden Linien, die senkrecht zu  $O E$  gezogen sind, und die sich auf verschiedene Werte von  $n$  beziehen, heissen *Jahreslinien*.

Bei einem gegebenen Kurse  $100x$ , einem gegebenen nominellen Zinsfuss  $100i$  und einer Laufzeit  $n$  findet man den reellen Zins folgendermassen. Die bewegliche Ebene wird so auf der festen eingestellt, dass die Linie  $l_1$  auf die zu  $n$  gehörende Jahreslinie fällt. Ausserdem muss der Schnittpunkt des Teilstrichs  $100x$  ( $l_3$ ) mit  $l_1$  auf der Zinslinie  $100i$  liegen. Der Schnittpunkt der Linie  $100$  ( $l_2$ ) mit  $l_1$  liegt dann auf der Zinslinie, die zu dem reellen Zinsfuss  $100r$  gehört, sodass der Wert des reellen Zinsfusses von dieser Linie abgelesen werden kann.

Muss bei gegebener Laufzeit und gegebenem nominellen und reellen Zinsfuss der Kurs bestimmt werden, so wird  $\pi'$  wieder so auf  $\pi$  gelegt, dass  $l_1$  auf die richtige Jahreslinie fällt. Man sorgt weiter dafür, dass der Schnittpunkt der Geraden  $100$  ( $l_2$ ) der Kursskala mit der Linie  $l_1$  auf der Zinslinie  $100r$  liegt. Derjenige Teilstrich  $100x$  ( $l_3$ ), der bei diesem Stande durch den Schnittpunkt der Zinslinie  $100i$  mit  $l_1$  geht, gibt den gesuchten Wert von  $100x$  an.

Bei dem Tokometer gleitet die Kursskala auf einem senkrecht zu den Jahreslinien beweglichen Schieber, und zwar senkrecht zur Bewegungsrichtung des Schiebers. Hat man den Schieber in einen solchen Stand gebracht, dass die Kursskala mit der gegebenen Jahreslinie zusammenfällt, so setzt man ihn fest, indem man einige Schrauben anzieht. Nachdem man dann die Schraube, mit der die Skala auf dem Schieber befestigt ist, gelockert hat, kann man die Kursskala auf der Jahreslinie entlanggleiten lassen.

Das Instrument besitzt die folgenden Teilungen:

1.  $n$  läuft von 1 bis 400, und zwar  
     von 1 bis 200 mit Intervallen von 1,  
     von 200 bis 400 mit Intervallen von 2;
2.  $100i$  und  $100r$  laufen von 0 bis 10 %, und zwar  
     für  $n \leq 2$  mit Intervallen von 1 %,  
     für  $2 \leq n \leq 10$  mit Intervallen von 0,5 %,  
     für  $10 \leq n \leq 100$  mit Intervallen von 0,1 %,  
     für  $100 \leq n \leq 400$  mit Intervallen von 0,05 %;
3.  $100x$  läuft von 20 % bis 200 % mit Intervallen von 1 %.

Eine Laufzeit  $n=400$  scheint sehr gross. Der Entwerfer des Instruments hat jedoch Anleihen mit halb- und vierteljährlicher Zins- und Amortisationsfähigkeit berücksichtigen wollen. Bei einer Laufzeit von 100 Jahren wird man in solchen Fällen  $n=200$  bzw.  $n=400$  ansetzen müssen.

Wenn man mit Hilfe des Tokometers die Rentabilität von Anleihen mit halbjährlicher Zins- und Amortisationsfähigkeit bestimmt, findet man den halbjährlichen reellen Zinsfuss  $100 r_1$ , den man noch mit  $2 + r_1$  multiplizieren muss, um den jährlichen Zinsfuss zu erhalten. Diese Berechnung würde nicht erforderlich sein, wenn der Entwerfer auf der festen Ebene, die doch zu einem grossen Teil unbenutzt ist, eine sog. Doppelskala angebracht hätte, um die Beziehung zwischen  $100r$  und  $100r_1$  wiederzugeben (siehe Fig. 3).

In der dem Instrument beigefügten Gebrauchsanweisung gibt KRAÏTCHIK einige Beispiele der Kursbestimmung von Anleihen mit halbjährlicher Verzinsung und Amortisation. Wie uns scheint, hat der Verfasser dabei unrichtigerweise für den reellen Zins den Ausdruck  $\frac{1}{2}r$  gebraucht statt des Ausdrucks  $\sqrt{1+r} - 1$ . Mit Hilfe der obenerwähnten Doppelskala könnte man letzteren Wert unmittelbar ablesen.

Geschieht die Amortisation mit Aufgeld, so muss die Kursformel (I 13) ersetzt werden durch

$$(14) \quad \dots \quad 100 x_{(i,r)}^g = (1 + g) \cdot 100 \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|1+g}}.$$



Sind  $100 x_{(i,r)}^g$ ,  $g$ ,  $i$  und  $n$  gegeben, so kann man  $\frac{1}{1+g} 100 x_{(i,r)}^g$  und  $\frac{i}{1+g}$  berechnen und dann mit dem Instrument auf genau dieselbe Weise wie bei Anleihen ohne Aufgeld den reellen Zinsfuss  $100 r$  bestimmen.

Wenn  $g$ ,  $n$ ,  $i$  und  $r$  gegeben sind, so berechnet man zunächst  $\frac{i}{1+g}$  und findet dann mit Hilfe des Tokometers den Wert von  $\frac{a_{n|}^- r}{a_{n|}^- \frac{i}{1+g}}$ . Diesen Wert muss man noch mit dem Faktor  $(1+g)$  multiplizieren, um den Kurs zu erhalten. Durch Anbringung einer logarithmischen Skala  $S$  ( $\eta = \mu_2 \log 100 i$ , siehe Fig. 3) an einer der Jahreslinien auf der festen Ebene hätte man die Ausführung dieser Hilfsberechnungen überflüssig machen können. Legt man nämlich die Kursskala so an  $S$  an (Fig. 4a), dass der Punkt  $100 + 100 g$  dem Teilstrich  $100 i$  von  $S$  gegenüberliegt, so liest man beim Teilstrich 100 der Kursskala den Wert von  $\frac{100 i}{1+g}$  auf  $S$  ab. Fig. 4a zeigt nämlich, dass

$$\mu_2 \log 100 i - \mu_2 \log p = \mu_2 \log (100 + 100 g) - \mu_2 \log 100$$

$$\therefore p = \frac{100 i}{1+g}.$$

Ebenso wird man den Wert  $\frac{1}{1+g} 100 x_{(i,r)}^g$  finden, wenn man den Punkt  $100 x_{(i,r)}^g$  der Kursskala auf den Teilpunkt  $100 i$  der Skala  $S$  (Fig. 4b) legt. Bei dem soeben gefundenen Punkt  $A$  der Skala  $S$  liest man dann auf der Kursskala den Wert von  $\frac{1}{1+g} 100 x_{(i,r)}^g$  ab.

Auch die bei der Kursbestimmung von Anleihen mit Aufgeld erforderliche Multiplikation von  $\frac{a_{n|}^- r}{a_{n|}^- \frac{i}{1+g}}$  mit  $(1+g)$  kann man mit Hilfe der Skala  $S$  ausführen, indem man den Punkt der Kurs-



skala, der dem ersten Faktor entspricht, auf den Punkt A der Skala S legt (Fig. 4b). Der Teilpunkt  $100i$  der Skala S fällt dann

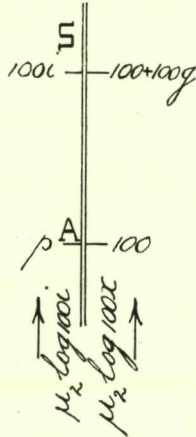


Fig. 4a

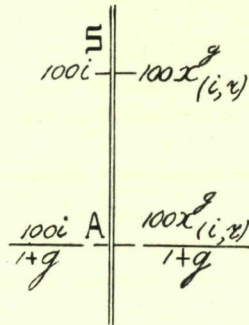


Fig. 4b

mit dem Wert des gesuchten Produkts auf der Kursskala zusammen.

Das Tokometer kann auch benutzt werden, wenn Couponsteuer zu berücksichtigen ist.

§ 14. In einer von KRAÏTCHIK<sup>1)</sup> herausgegebenen Nomogrammensammlung findet man auch eins, das aus den Scharen (2), (3) und (4) besteht, wobei ausserdem die Kursskala abgedruckt ist. Diese kann mit einer Schere abgetrennt und dann an jede gewünschte Jahreslinie angelegt werden. Die Grösse  $n$  läuft hier von 1 bis 100, der Wert von  $100i$  bzw.  $100r$  läuft von 2 bis 10.

Die von SOREAU<sup>2)</sup> an diesem Nomogramm geübte Kritik gilt auch für das Tokometer. An erster Stelle findet SOREAU es unlogisch, dass die Jahreslinien in ungleichen Abständen voneinander gezeichnet sind. Ferner macht er die Bemerkung, dass die Zinslinien bei kleinen Werten von  $n$  zu nahe beieinander liegen, wodurch die Genauigkeit der Resultate beeinträchtigt wird<sup>3)</sup>. Er hätte hin-

<sup>1)</sup> Les tables graphiques financières. GAUTHIER—VILLARS. Paris 1920<sup>1</sup>. 1927<sup>2</sup>. p. 15.

<sup>2)</sup> SOREAU. l.c. t. II. p. 184.

<sup>3)</sup> Dies gilt jedoch nicht für die Kursbestimmung.

zufügen können, dass das Auge überanstrengt wird, sodass das Arbeiten mit dem Tokometer bei kleinen Werten von  $n$  sehr ermüdend ist. Als Verbesserungen schlägt SOREAU vor, die Jahreslinien in gleichen Abständen voneinander zu konstruieren und die Strecken  $AB$  (Fig. 3) so zu dehnen, dass sie auf jeder Jahreslinie dieselbe Länge haben. Zu jeder Jahreslinie gehört dann eine andere Kursskala. Man kann zu dem von SOREAU konstruierten Nomogramm gelangen, wenn man die Gleichung

$$(1) \quad \dots \dots \dots 100x = 100 \frac{a_{\overline{n}|r}}{a_{\overline{n}|i}}$$

durch ein Nomogramm mit gleitenden bezifferten Scharen (§ 9) in der folgenden Weise darstellt. Auf die feste Ebene  $\pi$  bringt man die Scharen (Fig. 5):

$$(15) \quad \xi = \mu_1 n \quad \eta = \mu_2 \lambda (\log a_{\overline{n}|r} - \log a_{\overline{n}|7}) \quad (P_1)$$

$$(16) \quad \xi = \mu_1 n \quad \eta = \mu_2 \lambda (\log a_{\overline{n}|i} - \log a_{\overline{n}|7}) \quad (P_2)$$

Hierin ist

$$\lambda = \frac{\log \frac{a_{\overline{40}|3}}{a_{\overline{40}|7}}}{\log \frac{a_{\overline{n}|3}}{a_{\overline{n}|7}}}.$$

Alle Strecken  $AB$  (Fig. 3) werden nun gleich lang (Fig. 5). Auf der beweglichen Ebene konstruiert man die Linie

$$(17) \quad \dots \dots \dots \eta' = \mu_2 c \quad l'_1$$

und die Schar:

$$(18) \quad \xi' = \mu_1 n \quad \eta' = \mu_2 \lambda (\log 100x - \log 100) + \mu_2 c \quad (l'_2)$$

wobei  $c$  eine beliebige Konstante ist. Bei der Konstruktion von Fig. 5 wurde  $\mu_1 = 2,5$  mm und  $\mu_2 = 125$  mm gewählt.

Bei der Bewegung von  $\pi'$  über  $\pi$  müssen die Achsen  $O'H'$  und  $OH$  stets zusammenfallen. Man geht von  $\pi'$  über auf  $\pi$ , indem man in (17) und (18) substituiert:

$$\xi' = \xi \quad \eta' = b - \eta,$$

wobei  $b$  die Ordinate von  $O'$  hinsichtlich  $\Xi OH$  ist. Man erhält dann

$$(19) \quad \dots \dots \dots b - \eta = \mu_2 c \quad l_1$$

$$(20) \quad \xi = \mu_1 n \quad b - \eta = \mu_2 \lambda (\log 100 x - \log 100) + \mu_2 c \quad (l_2).$$

In (19) und (20) substituiert man für  $\xi$  und  $\eta$  nacheinander die Werte aus (15) und (16) und erhält dann

$$(21) \quad \dots \dots \dots b - \mu_2 \lambda (\log a_{n|r} - \log a_{n|7}) = \mu_2 c$$

$$(22) \quad b - \mu_2 \lambda (\log a_{n|i} - \log a_{n|7}) = \mu_2 \lambda (\log 100 x - \log 100) + \mu_2 c.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen  $b$  eliminiert, erhält

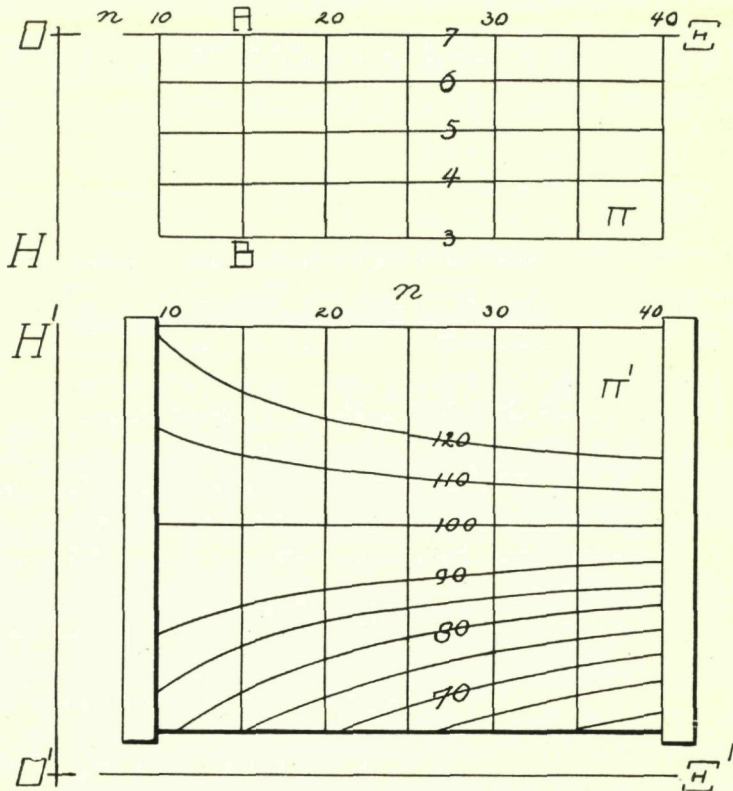


Fig. 5



man wieder die Gleichung (1), womit die Darstellung als richtig bewiesen ist.

Wenn man die Figuren 3 und 5 miteinander vergleicht, wird man schwerlich bestreiten können, dass die von SOREAU vorgenommenen Abänderungen wirklich Verbesserungen sind. KRAÏTCHIK hat jedoch, als er im Jahre 1928 ein neues Modell des Tokometers entwarf, das System der veränderlichen Kursskala nicht übernommen. Es ist uns bekannt, dass er dabei das Bedenken hegte, dass das Tokometer zu kompliziert werden würde. Wir können diese Meinung nicht teilen, glauben vielmehr, dass mit Hilfe dieses Systems ein bequemer zu handhabendes Instrument verfertigt werden könnte. Es wäre dann allerdings notwendig, die Rollen von  $\pi$  und  $\pi'$  zu vertauschen und die hölzerne Platte, auf der die Scharen der Ebene  $\pi'$  angebracht sind, mit erhöhten Rändern zu versehen (Fig. 5), die bei der Bewegung der Ebene  $\pi$ , die aus durchsichtigem Material bestehen müsste, als Gleitbahnen dienen. Der Fehler, dass die Kursskala an eine verkehrte Jahreslinie angelegt würde, ist dann ausgeschlossen. Man kann auch in einfacherer Ausführung die Scharen von  $\pi'$  auf starken Karton und die von  $\pi$  auf Pausleinen zeichnen.

§ 15. Das in Fig. 6\* abgebildete Modell 1928 des Tokometers ist nach der Meinung des Entwerfers besser geglückt als das vom Jahre 1914. Die Zins- und die Jahreslinien sind auf einer weisslackierten hölzernen Platte angebracht, die von einem hölzernen Rahmen eingefasst ist. Das Ganze ruht auf vier Füßen. Ein lose beigefügtes Lineal, das aus freier Hand an der gewünschten Stelle aufgelegt werden kann, trägt die Kursskala. Die Jahreslinien sind in gleichen Abständen gezeichnet, und die Ebene ist dank einer günstigeren Wahl des Achsenkreuzes  $\varepsilon OH$  besser ausgenutzt (Fig. 6, man vergleiche diese mit Fig. 3).

KRAÏTCHIK hat dies erreicht, indem er in den Gleichungen (2), (3) und (4)  $\log n$  ersetzt durch  $n$ ,  $\log a_{\overline{n}|r}$  durch  $\log a_{\overline{n}|r} - \log a_{\overline{n}|5}$  und  $\log a_{\overline{n}|i}$  durch  $\log a_{\overline{n}|i} - \log a_{\overline{n}|5}$ . Die Grösse  $n$  läuft von 1 bis 55, und zwar mit Intervallen von 1, und die Zinslinien laufen von 2 % bis 10 % mit Intervallen von 0,05 % (für  $n < 5$  mit Intervallen von 0,1 %). Die Kursskala erstreckt sich von

50 % bis 150 % und ist unterverteilt in Zehntelprozent, über 100 % in Fünftelprozent. Ferner ist  $\mu_1 = 3,4$  mm und  $\mu_2 = 850$  mm; wir nahmen in Fig. 6  $\mu_1 = 2,5$  mm und  $\mu_2 = 125$  mm.

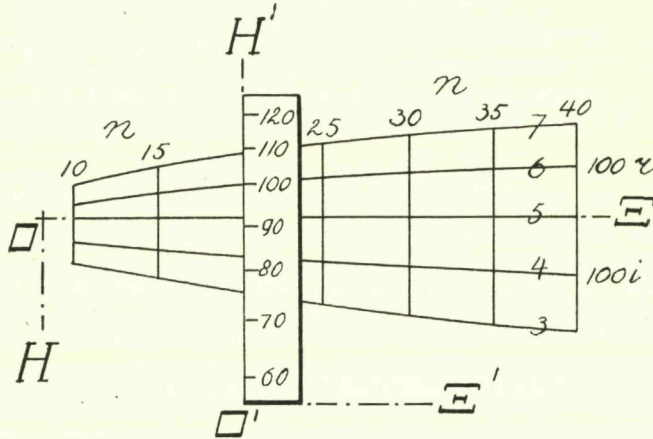


Fig. 6

Wir werden nun untersuchen, welche Genauigkeit mit dem Tokometer erreicht werden kann. Dabei nehmen wir an, dass das Instrument so genau konstruiert ist, dass es praktisch fehlerfrei ist, was durchaus möglich ist (siehe § 12).

**KURSBESTIMMUNG.** Auf der Kursskala wird bei dem Punkte C, der auf Zinslinie 100 *i* liegt (Fig. 7), der gesuchte Kurs abgelesen.

Der Fehler, den man macht, wenn man den Teilstrich 100 mit dem Punkte D zusammenfallen lässt, ist unbedeutend (sein mittlerer Wert ist 0,005 mm), sodass man nur Schätzungsfehler zu berücksichtigen hat, die nicht über

$$3 \times \frac{0,07}{\sqrt{J}} (100 x_2 - 100 x_1) \%$$

hinausgehen. Hierbei ist  $J$  die Grösse des Intervalls AB in Millimetern. Der Wert dieses Ausdrucks wächst, wenn  $J$  kleiner wird. Wenn wir uns auf Kurse beschränken, die

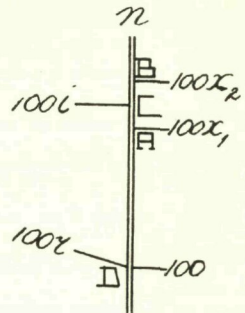


Fig. 7

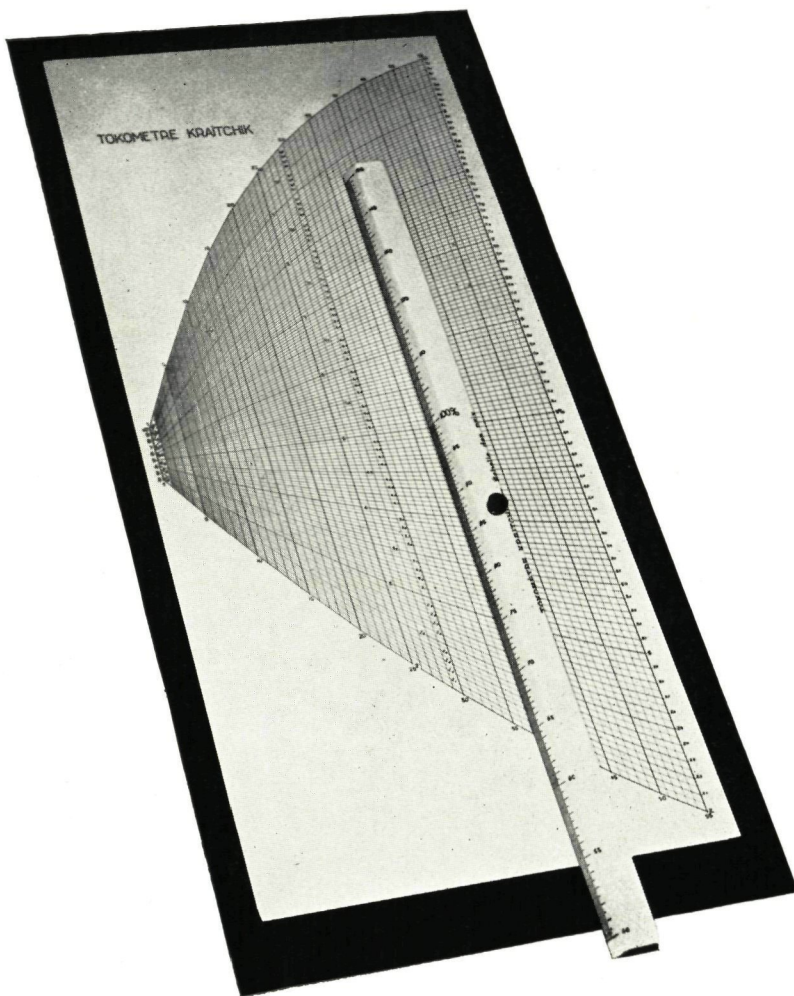


Fig. 6\*. Wirkl. Grösse :  $26 \times 52$  cm.





nicht höher sind als 110 %, so tritt der kleinste Wert von  $J$  im Intervall 109,8 % — 110 % auf. Er beträgt 0,67 mm, man darf also erwarten, dass die Fehler nicht grösser sind als 0,051 %.

Will man Couponsteuer berücksichtigen, so wird man in der Regel auch beim nominellen Zinsfuss interpolieren müssen, z.B. zwischen  $100 i_1$  und  $100 i_2$ . Man hat dann also zwei Fehlerquellen. Der mittlere Wert des resultierenden Fehlers kann dargestellt werden durch :

$$M = \sqrt{(0,07 \sqrt{J'})^2 + (0,07 \sqrt{J})^2},$$

worin  $J'$  das Intervall  $100 i_1 - 100 i_2$  und  $J$  das Intervall  $100 x_1 - 100 x_2$  ist. Praktisch wird man deshalb mit Fehlern zu rechnen haben, die nicht grösser sind als

$$\frac{3 \times 0,07 \sqrt{J' + J}}{J} (100 x_2 - 100 x_1) \%.$$

Der Wert dieses Ausdrucks wächst, wenn  $J$  kleiner wird, und auch, wenn  $J'$  grösser wird. Beschränken wir uns auch jetzt auf Kurse, die nicht höher sind als 110 %, nehmen wir  $3\frac{1}{2}$  als niedrigsten Wert für  $100 r$  und die Laufzeit mit höchstens 50 Jahren an, so erreicht der Fehler sein Maximum für  $n=50$ ,  $100 i=4$  und  $100 r=3\frac{1}{2}$ .

Beträgt die Couponsteuer 2 %, so ist  $100 i_1=3,90$ ,  $100 i_2=3,95$  und wird der Wert des oben angegebenen Ausdrucks für den maximalen Fehler 0,119 %.

RENTABILITÄTSBESTIMMUNG. Der gegebene Kurs liege zwischen  $100 x_1$  und  $100 x_2$ . Nachdem man die Kursskala in die richtige Lage gebracht hat, liege ihr Teilstrich 100 zwischen  $100 r_1$  und  $100 r_2$ . In analoger Weise wie bei der Kursbestimmung findet man, dass mit einem Maximalfehler von

$$\frac{3 \times 0,07 \sqrt{J + J'}}{J'} (100 r_2 - 100 r_1) \%$$

gerechnet werden muss. In diesem Ausdruck ist  $J$  die Grösse des Intervalls  $100 x_1 - 100 x_2$  und  $J'$  die Grösse des Intervalls  $100 r_1 - 100 r_2$ . Der Fehler wächst, wenn  $J$  grösser, und auch, wenn  $J'$  kleiner wird.  $J'$  wird kleiner, wenn  $n$  kleiner wird, während  $J$  von  $n$

unabhängig ist. Hieraus folgt, dass der Fehler umso grösser wird, je kleiner  $n$  ist. Wird  $100i$  nicht grösser als 5 angenommen, dann ist für  $n=6$  der Wert des oben stehenden Ausdrucks für den maximalen Fehler im ungünstigsten Falle 0,020 %. Für  $n < 6$  ist die Differenz benachbarter Zinslinien 0,1 %. Für  $n=3$  finden wir einen maximalen Fehler von 0,036 %.

Wenn Couponsteuer zu berücksichtigen ist, muss in der Regel auch wieder beim nominellen Zinsfuss interpoliert werden, wodurch der Fehler grösser wird. In diesem Falle wird der maximale Fehler 0,025 % für  $n=6$  und 0,044 % für  $n=3$ .

Die mit dem Instrument zu erreichende Genauigkeit erscheint uns als ausreichend, sodass seine Benutzung vorteilhaft ist, wenn man Couponsteuer zu berücksichtigen hat.

---





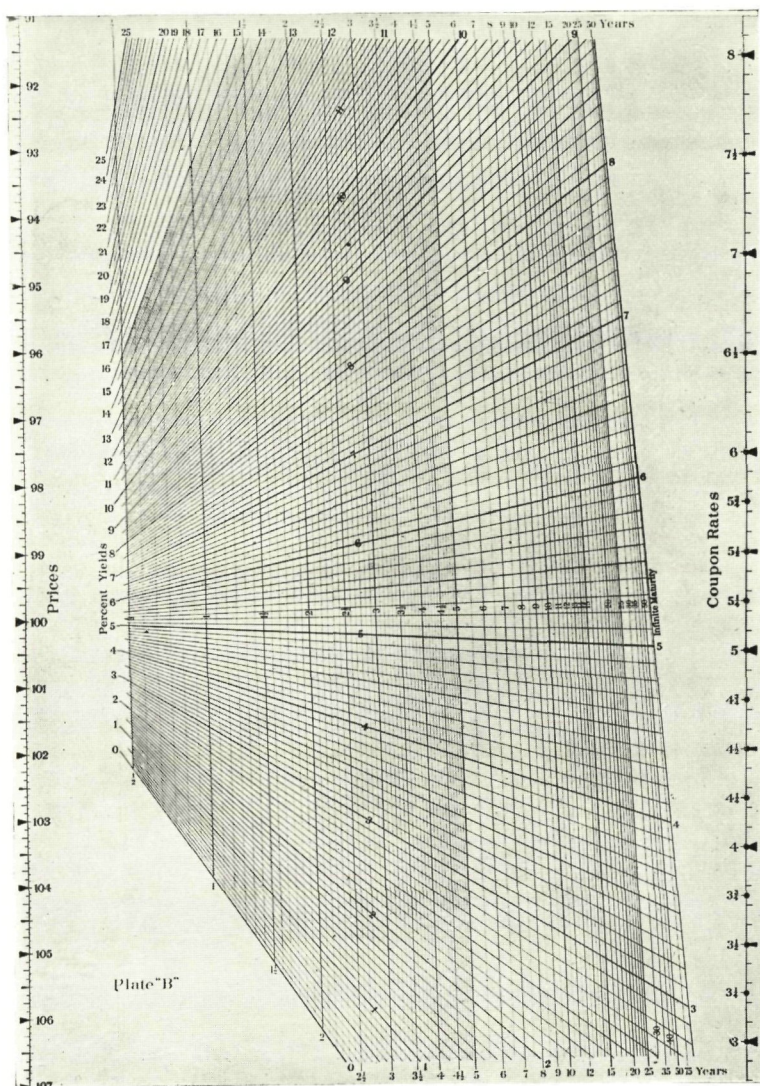


Fig. 8\*. Wirkl. Grösse : 33 × 46 cm.

## KAPITEL IV.

### Die „bond yield chart“ von Darville-Johnson.

Patented April 25th 1922. Copyright  
1921 by D. C. JOHNSON and M. A.  
DARVILLE. Published by Prentice-Hall,  
Inc. New York, N. Y.

§ 16. Dies Instrument gilt für

- a. auf einmal rückzahlbare Anleihen,
- b. nicht rückzahlbare Anleihen,
- c. auf einmal mit Aufgeld rückzahlbare Anleihen.

Sowohl hinsichtlich des nominellen als auch des reellen Zinsfusses wird mit halbjährlicher Fälligkeit gerechnet.

Auf beiden Seiten einer rechteckigen hölzernen Platte von  $33 \times 46$  cm Grösse ist je ein Kartonblatt angebracht, auf dem sich ein Nomogramm befindet (plate A und plate B; in Fig. 8\* ist plate B abgebildet). Die Zeichnungen sind des Schutzes halber mit durchsichtigem Celluloid bedeckt. Ein flaches Lineal aus durchsichtigem Material, das die Ableselinie trägt, ist dem Instrument beigelegt.

#### a. Auf einmal rückzahlbare Anleihen.

Für diese Anleihen gilt die Kursformel (I 10), die geschrieben werden kann in der Form

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 100 x_{(2)} \\ 0 & 1 & -100 j \\ \frac{r}{s} & 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{s}\right)^{2n}} & \frac{100 \frac{r}{s}}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{s}\right)^{2n}} \end{vmatrix} = 0$$

sodass sie durch eine Fluchtentafel dargestellt werden kann (§ 8).

Wir bemerken hierzu, dass der Ausdruck  $100 \frac{r}{s}$  den Jahresprozent-



satz desjenigen reellen Zinses angibt, dessen Hälfte halbjährlich zahlbar ist. Setzen wir  $\frac{r}{s} = y$ , so ergeben die Formeln (II 11)

$$\xi = -d \quad \eta = -\mu_1 \cdot 100 x_{(2)}$$

$$\xi = d \quad \eta = \mu_2 \cdot 100 j$$

$$(2) \quad \dots \quad \xi = \frac{\mu_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} y)^{2n}} \right\} - \mu_2 y}{\mu_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} y)^{2n}} \right\} + \mu_2 y} d$$

$$(3) \quad \dots \quad \eta = - \frac{100 \mu_1 \mu_2 \frac{y}{(1 + \frac{1}{2} y)^{2n}}}{\mu_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} y)^{2n}} \right\} + \mu_2 y}.$$

Das Nomogramm enthält demnach zwei gerade, parallele Skalenträger und ein Netz zweifach bezifferter Punkte. Auf der Achse  $AU$  (Fig. 8) ist die Skala  $-\mu_1 \cdot 100 x_{(2)}$  gezeichnet und auf  $BV$  die Skala  $\mu_2 \cdot 100 j$ . Um den verfügbaren Raum so viel wie möglich auszunutzen, macht man diese Skalen gleich lang, zu welchem Zwecke  $\mu_1$  und  $\mu_2$  so gewählt sind, dass

$$\mu_1 (100 x'_{(2)} - 100 x''_{(2)}) = \mu_2 (100 j_2 - 100 j_1)$$

ist, wobei  $100 x'_{(2)}$ ,  $100 x''_{(2)}$ ,  $100 j_2$  und  $100 j_1$  die Extremwerte des Kurses bzw. des nominellen Zinsfusses darstellen.

Elimination von  $n$  aus (2) und (3) gibt:

$$(4) \quad \dots \quad \xi = \frac{2\eta + 100 \mu_1 - \mu_2 \cdot 100 y}{100 \mu_1 + \mu_2 \cdot 100 y} d.$$

Diese Gleichung stellt ein Strahlenbüschel ( $a_1, a_2, a_3 \dots$ ) dar. Der Punkt 100 der Kursskala ist der Träger des Büschels, denn seine Koordinaten  $\xi = -d$  und  $\eta = -\mu_1 \cdot 100$  befriedigen die Gleichung (4).

Für  $\xi = d$  gibt (4):

$$\eta = \mu_2 \cdot 100 y.$$

Eine beliebige Gerade des Büschels (4), z.B. diejenige, welche dem Werte  $100j=4$  entspricht, kann deshalb gezeichnet werden,

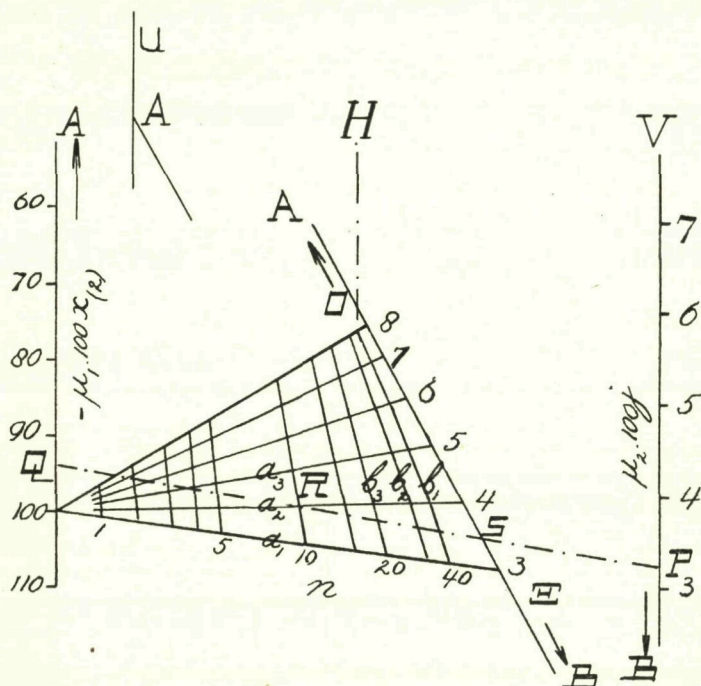


Fig. 8

indem man den Punkt der Achse  $BV$ , der zu dem Werte  $100j=4$  gehört, mit dem Punkte 100 der Achse  $AU$  verbindet.

Gibt man  $n$  in (2) und (3) einen bestimmten Wert, so sind  $\xi$  und  $\eta$  nur abhängig von  $y$  und bestimmen die Gleichungen (2) und (3) eine Kurve (eine der  $b$ -Linien, Fig. 8). Durch Variation von  $n$  erhält man diese Linienschar.

Will man nun bei gegebenen  $100j$ ,  $100x_{(2)}$  und  $n$  die Rentabilität der Anleihe bestimmen, so legt man die Ableselinie durch denjenigen Punkt der Achse  $BV$ , der mit dem gegebenen Wert von  $100j$ , und durch denjenigen Punkt der Achse  $AU$ , der mit dem gegebenen Kurswert  $100x_{(2)}$  beziffert ist (Fig. 8). Dann bestimmt man den Schnittpunkt  $R$  der Ableselinie mit der zu  $n$  gehörenden  $b$ -Linie. Die Bezifferung der durch  $R$  gehenden  $a$ -Linie gibt dann den gesuchten Rentabilitätsprozentsatz an.



Sind der nominelle und der reelle Zinsfuss, sowie die Anzahl der Zinsperioden  $n$  gegeben, und wird nach dem Kurse gefragt, so bestimmt man zunächst den Punkt  $R$ , der den gegebenen Werten von  $100y$  und von  $n$  entspricht. Durch  $R$  und den Punkt  $P$  der Achse  $BV$ , der den gegebenen Wert von  $100j$  angibt, wird die Ableselinie gelegt, die dann die Achse  $AU$  schneidet im Punkte  $Q$ , von dem man den gesuchten Kurs ablesen kann.

Zu dem ersten Nomogramm von DARVILLE-JOHNSON, das von den Entwerfern „plate A“ genannt wurde, bemerken wir das Folgende. Die Kursskala läuft in Viertelprozenten von 40 % bis 135 %. Da  $\mu_1 = \frac{1}{16}$  inch gewählt wurde, beträgt der Abstand je zweier Teilstriche  $\frac{1}{2} \frac{1}{40}$  inch oder 1,16 mm.

Die Skala des nominellen Zinsfusses, deren Träger dem der ersten Skala im Abstände von  $12\frac{1}{4}$  inch oder 311,14 mm parallel ist, läuft von 3 % bis 6 % in Viertelprozenten und weiter bis 8 % mit Intervallen von  $\frac{1}{2}$  %. Für den Modul  $\mu_2$  wurde  $\frac{1}{8}$  inch genommen, woraus folgt, dass der Abstand je zweier Teilstriche  $\frac{1}{2} \frac{0}{2}$  inch oder 21,12 mm ist.

Die  $a$ -Linien beziehen sich auf die Werte des reellen Zinsfusses von 0 bis 100. Bis zum Werte 15 % betragen die Intervalle  $\frac{1}{10}$  %, bei höheren Werten  $\frac{1}{2}$  % oder mehr. Die in roter Farbe gezeichneten  $b$ -Linien gehen von  $n = \frac{1}{2}$  bis  $n = 100$ . Bis  $n = 15$  ist das Intervall  $\frac{1}{2}$ ; für höhere Werte von  $n$  wird es grösser.

Auf der Skala des nominellen Zinsfusses sind die Teilpunkte Achsen zylindrischer Ausbohrungen, in die ein Stift passt, der an dem flachen Celluloidlineal sitzt, das die Ableselinie trägt. Wird der Stift in eine der Ausbohrungen gesetzt, so geht die Ableselinie genau durch den Teilpunkt. Hierdurch wird der Gebrauch des Instruments wesentlich bequemer gemacht.

Das Nomogramm auf der andern Seite der Platte, „plate B“, gilt für die am häufigsten vorkommenden Kurse und ist nach dem gleichen Prinzip konstruiert. Die Skala des nominellen Zinsfusses stimmt genau mit der von „plate A“ überein, während die Kursskala die Kurse von 91 % bis 107 % in Achtelprozenten angibt. Für den Modul  $\mu_1$  wurde  $\frac{1}{9}$  inch gewählt, sodass der Abstand je zweier Teilpunkte  $\frac{1}{9} \frac{0}{9}$  inch = 3,53 mm beträgt.

Die  $a$ -Linien haben Beziehung auf die Werte des reellen Zins-



fusses von 0 bis 25 und die  $b$ -Linien auf die Werte  $n = \frac{1}{2}$  bis  $n = 75$ ; das Intervall beträgt hierbei jedoch zunächst  $\frac{1}{12}$ , wird aber für höhere Werte als  $n = 5$  wieder grösser.

Wie schon erwähnt wurde, lassen die Entwerfer den reellen Zinsfuss von 0 % bis 100 % laufen. Nach unserer Meinung ist die obere Grenze viel zu hoch gewählt mit dem Erfolge, dass das Nomogramm völlig überflüssigerweise eine sehr grosse Zahl von Linien enthält, wodurch die Übersichtlichkeit sehr beeinträchtigt wird.

Ein zweiter Umstand, der zu Kritik Veranlassung gibt, ist der gegenseitige Abstand der  $b$ -Linien, der an manchen Stellen viel zu klein ist. Auf „plate A“ kommen z.B. Linien vor, deren Abstand, von Mitte zu Mitte gemessen, 0,3 mm ist. Hierdurch werden Irrtümer begünstigt und an das Auge zu hohe Anforderungen gestellt. Wir können uns F. WENNER<sup>1)</sup> voll und ganz anschliessen, wenn er dafür eintritt, dass der Abstand zweier Linien ungefähr zwei Millimeter betragen sollte. Man würde mit dem Instrument viel angenehmer und schneller arbeiten können, wenn die Entwerfer dieser Forderung Rechnung getragen hätten.

Endlich finden wir, dass das Instrument zu gross und dadurch lästig zu handhaben ist. Nach unserer Meinung sollte man ein Nomogramm nicht grösser machen als etwa  $20 \times 25$  cm.

#### b. Nicht rückzahlbare Anleihen.

§ 17. Hierfür gilt die Formel

$$(I9) \quad \dots \dots \dots x_{(2)} = \frac{js}{r},$$

die sich umformen lässt in

$$(5) \quad \dots \dots \dots \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 100 x_{(2)} \\ 0 & 1 & -100j \\ \frac{r}{s} & 1 & 0 \end{array} \right| = 0$$

und deshalb durch eine Fluchtentafel (§ 7) dargestellt werden

<sup>1)</sup> Praktische Rechenbildkunde. Aachener Verlags- und Druckerei-Gesellschaft. 1926. p. 75.

kann. Wir setzen wieder  $\frac{r}{s} = y$  und finden dann mit Hilfe der Formeln (II 11):

$$\xi = -d \quad \eta = -\mu_1 \cdot 100 x_{(2)}$$

$$\xi = d \quad \eta = \mu_2 \cdot 100 j$$

$$\xi = \frac{\mu_1 - \mu_2 y}{\mu_1 + \mu_2 y} d \quad \eta = 0.$$

Die Skalenträger sind also sämtlich gerade Linien. Das Nomogramm braucht nicht besonders konstruiert zu werden, weil es in dem Nomogramm für auf einmal rückzahlbare Anleihen bereits ganz enthalten ist. Für die ersten beiden Skalen ist dies ohne weiteres ersichtlich, aber auch die dritte ist bereits vorhanden, denn diese wird auf der Geraden  $AB$  durch die Schnittpunkte der  $a$ -Linien erzeugt. Die Substitution  $\eta = 0$  in (4) gibt nämlich auch:

$$\xi = \frac{\mu_1 - \mu_2 y}{\mu_1 + \mu_2 y} d.$$

Das Instrument von DARVILLE-JOHNSON kann somit auch für nicht rückzahlbare Anleihen benutzt werden.

Zu demselben Ergebnis kann man auch gelangen, wenn man in den Formeln, die sich auf die auf einmal rückzahlbare Anleihe beziehen, die Grösse  $n$  unendlich gross werden lässt. Die auf einmal rückzahlbare Anleihe geht dann in die nicht rückzahlbare über. Substituiert man  $n = \infty$  in (3), so sieht man, dass die zugehörige  $b$ -Linie identisch ist mit der Geraden  $AB$ , sodass wir tatsächlich zu demselben Resultat wie oben gelangen.

Um bei gegebenem Kurs und gegebenem nominellen Zinsfuss die Rentabilität zu bestimmen, legt man die Ableselinie durch die gegebenen Punkte  $P$  (Fig. 8) der Skala des nominellen Zinsfusses und  $Q$  der Kursskala. Die Ableselinie schneidet dann die Skala des reellen Zinsfusses  $AB$ , die von DARVILLE und JOHNSON durch die Anschrift „infinite maturity“ hervorgehoben ist, in einem Punkte  $S$ , von dem der Rentabilitätsprozentsatz abgelesen werden kann.

Sind der nominelle und der reelle Zinsfuss gegeben, und will man den zugehörigen Kurs bestimmen, so legt man die Ableselinie durch



den mit dem Werte des gegebenen nominellen Zinsfusses beziffer-ten Punkt  $P$  der rechten Skala und durch den zu dem gegebenen Werte von  $100j$  gehörenden Punkt  $S$  der „infinite maturity“-Linie. Die Ableselinie schneidet dann die Kursskala in einem Punkte  $Q$ , der den gesuchten Kurs angibt.

*c. Auf einmal mit Aufgeld rückzahlbare Anleihen.*

§ 18. Gemäss (I 13) gilt für diese Anleiheart die Formel (I 10), wenn man darin  $x_{(2)}$  durch  $\frac{x_{(2)}}{1+g}$  und  $j$  durch  $\frac{j}{1+g}$  ersetzt.

Berücksichtigt man dies, so kann das Instrument von DARVILLE-JOHNSON für diesen Anleihentyp übrigens in derselben Weise benutzt werden, wie oben für auf einmal rückzahlbare Anleihen ohne Aufgeld beschrieben wurde. Die Division des nominellen Zinses durch  $(1+g)$  kann mit Hilfe des Instruments bewerkstelligt werden. Bei dem Schnittpunkt  $C$  der Skala des reellen Zinsfusses mit der Geraden, die durch den Punkt  $100j$  der rechten Skala und den Punkt  $100 + 100g$  der Kursskala (Fig. 9) geht, liest man nämlich gemäss § 17 den Wert  $100 \frac{j}{1+g}$  ab. Wenn man die Ableselinie durch denselben Punkt  $100j$  der rechten Skala und den Punkt  $100x_{(2)}$  der Kursskala legt, wird die Skala des reellen Zinsfusses in einem Punkte  $D$  geschnitten, zu dem der Wert  $100 \frac{j}{x_{(2)}}$  gehört.

Legt man endlich die Ableselinie durch denjenigen Punkt  $E$  der rechten Skala, dessen Bezifferung der soeben gefundene Wert  $100 \frac{j}{1+g}$  ist, und durch den ebenfalls soeben gefundenen Punkt  $D$ , so wird sie die Kursskala in einem Punkte  $F$  schneiden, dessen Bezifferung den Wert  $100 \frac{x_{(2)}}{1+g}$  angibt. Die Gerade  $EF$  stellt also die Endlage der Ableselinie dar bei der Kursbestimmung einer auf einmal mit Aufgeld rückzahlbaren Anleihe.

Sind der Kurs, der nominelle Zinsfuss, das Aufgeldprozent und die Dauer der Anleihe gegeben, so findet man die Rentabilität in folgender Weise:

1. Man legt die Ableselinie durch den Punkt, der auf der Skala



des nominellen Zinsfusses mit dem Werte  $100j$  übereinstimmt, und denjenigen Punkt der linken Skala, der zum Kurswert

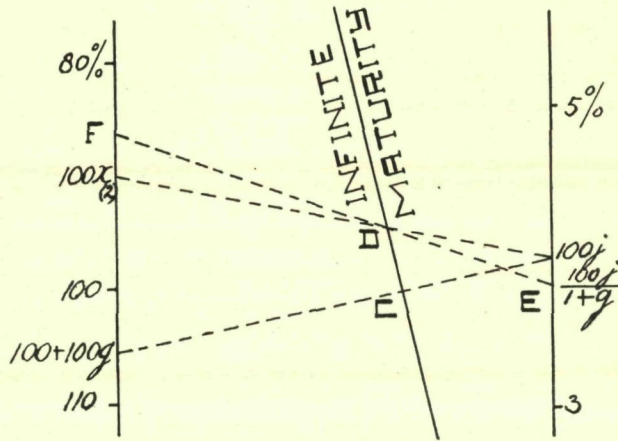


Fig. 9

$100 + 100g$  gehört. Bei dem Schnittpunkt der Ableselinie mit der Skala des reellen Zinsfusses liest man den Wert  $100 \frac{j}{1+g}$  ab, den man notiert.

2. Man schwingt die Ableselinie um ihren Schnittpunkt mit der rechten Skala herum, bis sie durch den Punkt  $100 \cdot x_{(2)}$  der Kursskala geht. Sie schneidet dann die Skala des reellen Zinsfusses in einem Punkte  $D$ .

3. Man dreht die Ableselinie um den Punkt  $D$ , bis sie die rechte Skala schneidet in dem Punkte, dessen Bezifferung mit dem gefundenen und notierten Werte  $100 \frac{j}{1+g}$  (siehe oben unter 1.) übereinstimmt. Die zu dem gegebenen Werte von  $n$  gehörende  $b$ -Linie (siehe Fig. 8) schneidet dann die Ableselinie in einem Punkte, dessen Bezifferung den gesuchten Rentabilitätssatz angibt.

Sind die Werte des nominellen und des reellen Zinsfusses, die Dauer der Anleihe und das Agio bekannt, so kann man bei der Kursbestimmung folgenderweise verfahren:

1. Man verfährt wie oben unter 1. bei der Rentabilitätsbestimmung.

2. Man legt die Ableselinie durch denjenigen Punkt der rechten Skala, der dem soeben gefundenen Werte von  $100 \frac{j}{1+g}$  entspricht, und durch den Schnittpunkt der zum gegebenen Wert von  $n$  gehörenden  $b$ -Linie mit der zum gegebenen Wert des reellen Zinsfusses gehörenden  $a$ -Linie (siehe Fig. 8). Die Ableselinie schneidet dann die Kursskala in dem Punkte, dessen Bezifferung den gesuchten Kurs angibt.

§ 19. Wir werden jetzt auch die mit diesem Instrument zu erreichende Genauigkeit (für „plate B“) bestimmen.

a. Auf einmal rückzahlbare Anleihen.

RENTABILITÄTSBESTIMMUNG. — Der reelle Zinsfuss wird beim Punkte  $P$  (Fig. 10) abgelesen. Muss beim Anlegen der Ableselinie der Punkt  $G$  durch Interpolation gefunden werden, so kann man erwarten, dass die Lage der Ableselinie mit einem Fehler behaftet sein wird. Der mittlere Fehler im Ort des Punktes  $G$  beträgt  $0.07 \sqrt{J'}$ , wobei  $J'$  die Länge des Intervalls  $KL$  ist. Obwohl der mittlere Wert des Fehlers, der im Ort des Punktes  $P$  innerhalb des Intervalls  $AB$  durch die fehlerhafte Lage der Ableselinie entsteht, kleiner ist, nehmen wir näherungsweise auch für ihn den Wert  $0.07 \sqrt{J'}$  an. Ausserdem entsteht ein Schätzungsfehler beim Ablesen des reellen Zinsfusses. Der resultierende Fehler wird praktisch den Betrag von

$$\frac{3 \times 0.07 \sqrt{J + J'}}{J} (100 y_2 - 100 y_1) \%$$

nicht übersteigen, wobei  $J$  die Länge des Intervalls  $AB$  ist. Der Fehler wächst, wenn  $J$  kleiner wird, was der Fall ist, wenn  $n$  kleiner wird, und auch, wenn der reelle Zinsfuss grösser wird. Wir beschränken uns auf häufiger vorkommende Werte des Kurses und des reellen Zinsfusses. Für  $n=2$ ,  $100 y_1=5.9$  und  $100 y_2=6$  wird der Wert des oben angegebenen maximalen Fehlers 0,017 %.

Häufig muss man auch hinsichtlich der Dauer  $n$  interpolieren. Bei diesem Anleihentyp gibt bekanntlich für einen gebrochenen Wert von  $n$  lineare Interpolation das richtige Resultat. Nehmen







KURSBESTIMMUNG. — Verföhrt man auch hier in derselben Weise wie bei der auf einmal rückzahlbaren Anleihe, so findet man, dass der Fehler, mit dem man rechnen muss, 0,31 % betrügt. Das Instrument besitzt jedoch zwei Kursskalen auf demselben Träger. Die eine Skala ist in Viertel, die andere in Zehntel eines Prozents eingeteilt. Der gegenseitige Abstand zweier Teilstriche der zweiten Skala betrügt 8,4 mm und kann deshalb ohne Bedenken noch in 5 gleiche Teile unterverteilt werden. Nimmt man diese Unterverteilung vor, so braucht man nur mit einem Fehler von 0,24 % zu rechnen.

c. *Auf einmal mit Aufgeld rückzahlbare Anleihen.*

Benutzt man das Instrument in der beschriebenen Weise, so ist die Genauigkeit der Resultate nur gering. Zweckmässiger erscheint es uns, die Werte von  $100 \frac{j}{1+g}$  und  $100 \frac{x_{(2)}}{1+g}$  selbständig, z.B. mit Hilfe eines Rechenschiebers, zu bestimmen.

Die mit der „bond yield chart“ gefundenen Resultate besitzen hinreichende Genauigkeit. Die Anwendung des Instruments bietet Vorteile, besonders bei auf einmal rückzahlbaren Anleihen. Das folgende Beispiel möge davon einen Eindruck geben.

*Beispiel.*

Eine auf einmal rückzahlbare vierprozentige Anleihe (mit halbjährlichen Coupons) habe einen Kurs von 92 %, die Dauer der Anleihe sei  $17\frac{1}{2}$  Jahre, die Couponsteuer betrage 2 %. Der jährliche Prozentsatz des reellen Zinses ist zu bestimmen.

AUFLÖSUNG MIT HILFE DER KURSTABELLE.

$$100j = 4$$

Für  $n = 18$  und  $100r_1 = 4\frac{1}{2}$  ist der Kurs 94,46

„  $n = 18$  „  $100r_2 = 4\frac{3}{4}$  „ „ „ 91,62

„  $n = 17$  „  $100r_1 = 4\frac{1}{2}$  „ „ „ 94,67

„  $n = 17$  „  $100r_2 = 4\frac{3}{4}$  „ „ „ 91,92

sodass

$$(100x_{(2)})'_{17\frac{1}{2}} = 94,46 + \frac{2}{3}(94,67 - 94,46) = 94,60$$

$$(100x_{(2)})''_{17\frac{1}{2}} = 91,62 + \frac{2}{3}(91,92 - 91,62) = 91,82$$

und

$$100 r = 4\frac{1}{2} + \frac{94,60 - 92}{94,60 - 91,82} (4\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2}) = 4,73.$$

$$100 j = 3\frac{1}{2}$$

Für  $n = 18$  und  $100 r_1 = 4$  ist der Kurs 94,11

„  $n = 18$  „  $100 r_2 = 4\frac{1}{4}$  „ „ „ 91,15

„  $n = 17$  „  $100 r_1 = 4$  „ „ „ 94,34

„  $n = 17$  „  $100 r_2 = 4\frac{1}{4}$  „ „ „ 91,49

sodass

$$(100 x_{(2)})'_{17\frac{1}{3}} = 94,11 + \frac{2}{3} (94,34 - 94,11) = 94,26$$

$$(100 x_{(2)})''_{17\frac{1}{3}} = 91,15 + \frac{2}{3} (91,49 - 91,15) = 91,38$$

und

$$100 r = 4 + \frac{94,26 - 92}{94,26 - 91,38} (4\frac{1}{4} - 4) = 4,20.$$

Der gesuchte reelle Zinsfuss ist also

$$4,20 + \frac{3,92 - 3\frac{1}{2}}{4 - 3\frac{1}{2}} (4,73 - 4,20) = 4,65.$$

#### AUFLÖSUNG MIT HILFE DES INSTRUMENTS.

Man bringt die Ableselinie in die richtige Lage und liest ab:

$$100 y = 4,60.$$

Dan berechnet man  $100 r$  wie folgt:

$$100 r = 100 y + \frac{1}{400} (100 y)^2 = 4,60 + \frac{1}{400} \times 4,60^2 = 4,65.$$

§ 20. F. KAMBER liess bei einem Artikel „Le calcul du taux de rendement des obligations remboursables à une date déterminée“<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1928. p. 41.



ein Nomogramm abdrucken, das im Wesentlichen ganz mit dem von DARVILLE-JOHNSON übereinstimmt. Es gilt jedoch für auf einmal rückzahlbare Anleihen mit jährlicher Fälligkeit sowohl des nominellen als auch des reellen Zinses. Um zu dem KAMBER'schen Nomogramm zu gelangen, bringt man die Gleichung (I3) in die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 100 i \\ 0 & 1 & -100 x \\ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} & r & -\frac{100 r}{(1+r)^n} \end{vmatrix} = 0$$

und wendet dann die Formeln (II 11) an. Der Verfasser benutzt das Nomogramm auch für Anleihen mit halbjährlicher Zinsfälligkeit. Die Laufzeit der Anleihe muss zu diesem Zwecke in halbjährigen Perioden ausgedrückt und für  $i$  muss die Hälfte des scheinbaren jährlichen nominellen Zinsfusses genommen werden. Man findet dann den reellen Zins  $100 r_1$  für halbjährige Perioden, der durch Multiplikation mit  $(2 + r_1)$  den jährlichen reellen Zinsfuss ergibt.

KAMBER weist in seinem oben zitierten Artikel darauf hin, dass das Nomogramm bei der Rentabilitätsbestimmung auch noch Dienste leisten kann, wenn der nominelle Zinsfuss einer gegebenen Anleihe ausserhalb der Grenzen der betreffenden Skala liegt. Man kann dann die Ableselinie in die richtige Lage bringen, wenn man zunächst durch Berechnung den Punkt bestimmt, in dem die Ableselinie die Gerade  $AB$  (Fig. 8) schneiden muss. Diese Gerade gehört bekanntlich zu dem Wert  $n = \infty$ , und der hierzu gehörende Wert von  $100 r$  kann mit der Formel

$$100 r = 100 \frac{i}{x}$$

berechnet werden.

§ 21. Das Nomogramm von DARVILLE-JOHNSON besitzt den Nachteil, dass die  $b$ -Linien für grosse Werte der Laufzeit sehr nahe beieinander liegen (Fig. 8). Man kann die Frage aufwerfen, ob es möglich ist, in einer der im ersten Teil von § 6 angegebenen



analogen Weise zu einer günstigeren Gestalt des Nomogramms zu gelangen. Hierzu hat man zunächst zu untersuchen, ob die Gleichung

$$(I\ 10) \quad \dots \quad x_{(2)} = \frac{js}{r} + \left(1 - \frac{js}{r}\right) \frac{1}{(1+r)^n}$$

oder

$$(6) \quad x_{(2)} = \frac{j}{y} + \left(1 - \frac{j}{y}\right) \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}y)^{2n}}, \text{ worin } y = \frac{r}{s} \text{ ist,}$$

umgeformt werden kann in eine Gleichung, deren linke Seite eine Funktion von zwei der vier Veränderlichen und deren rechte Seite eine Funktion der andern beiden Veränderlichen ist.

Wenn die Gleichung (6) auf die Form

$$(7) \quad \dots \quad f_1(x_{(2)}, j) = g_1(y, n)$$

gebracht werden könnte, so würde jede Wertgruppe der vier Veränderlichen, die (6) befriedigt, auch (7) befriedigen müssen. (6) wird befriedigt, wenn

$$x_{(2)} = 1, j = y = \text{beliebig, } n = \text{beliebig ist.}$$

Substitution hiervon in (7) ergibt:

$$f_1(1, j) = g_1(j, n).$$

Dieser Gleichung müsste jeder Wert von  $j$  und von  $n$  genügen. Hieraus folgt, dass  $g_1(j, n)$  und also auch  $g_1(y, n)$  von  $n$  unabhängig sein müsste, sodass Gleichung (7) eigentlich lauten müsste

$$(8) \quad \dots \quad f_1(x_{(2)}, j) = g_1(y).$$

Dies ist unvereinbar mit (6), weil  $n$  in (8) keinen Einfluss hat, in (6) dagegen wohl.

In derselben Weise kann man beweisen, dass (6) auch nicht auf die Form

$$f_2(x_{(2)}, y) = g_2(j, n)$$

gebracht werden kann.

Endlich ist noch zu untersuchen, ob (6) umgeformt werden kann in

$$(9) \quad \dots \dots \dots f_3(x_{(2)}, n) = g_3(j, y).$$

Dass dies unmöglich ist, erhellt, wenn man die Gleichung (6) schreibt in der Form

$$(10) \quad \dots \quad \left(x_{(2)} - \frac{j}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{2} y\right)^{2n} = 1 - \frac{j}{y}.$$

Setzt man darin  $y = -2$ , so ergibt sich, dass für  $j = -2$  die Gleichung befriedigt ist bei beliebigen Werten von  $x_{(2)}$  und  $n$ . Es müsste also

$$f_3(x_{(2)}, n) = g_3(-2, -2)$$

sein, d.h. die linke Seite von (9) müsste konstant sein für alle Werte von  $x_{(2)}$  und  $n$ . Dies ist unvereinbar mit Gleichung (10), worin  $x_{(2)}$  und  $n$  wohl Einfluss haben.

Trennung der Veränderlichen gemäss § 6 ist demnach für Gleichung (I 10) nicht möglich.

In § 16 wurde (I 10) auf die Form (1) gebracht und daraus das Nomogramm von DARVILLE-JOHNSON abgeleitet. Wir werden jetzt untersuchen, ob es auch möglich ist, die Gleichung darzustellen durch ein Nomogramm, das aus einer  $x_{(2)}$ -Skala und einer  $n$ -Skala auf parallelen Geraden und aus einem auf  $j$  und  $y$  bezüglichen Netz zweifach bezifferter Punkte besteht. Die Möglichkeit wäre nicht ausgeschlossen, dass das Nomogramm durch diese Vertauschung der Veränderlichen eine günstigere Form annähme.

Die Gleichung (6) kann in solcher Weise dargestellt werden, wenn es gelingt, sie auf die Form

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_{(2)} \\ 0 & 1 & n \\ f_3(j, y) & g_3(j, y) & h_3(j, y) \end{vmatrix} = 0$$

zu bringen, die bei Auflösung der Determinante übergeht in

$$(11) \quad \dots \quad x_{(2)} f_3(j, y) + n g_3(j, y) - h_3(j, y) = 0.$$

Aus (6) folgt:

$$n = \frac{\log(y-j) - \log(yx_{(2)}-j)}{2 \log(1 + \frac{1}{2}y)}$$

und aus (11):

$$n = \frac{h_3(j, y) - x_{(2)} f_3(j, y)}{g_3(j, y)}.$$

Die Bedingung für die Umformbarkeit von (6) in (11) ist demnach die Identität

$$(12) \quad \frac{\log(y-j) - \log(yx_{(2)}-j)}{2 \log(1 + \frac{1}{2}y)} = \frac{h_3(j, y) - x_{(2)} f_3(j, y)}{g_3(j, y)}.$$

Für  $x_{(2)} = 1$  und beliebige Werte von  $j$  und  $y$  gibt (12):

$$h_3(j, y) = f_3(j, y).$$

Wenn dies möglich wäre, müsste man (11) schreiben können in der Form

$$F(j, y) = G(x_{(2)}, n).$$

Die Gleichung (6) müsste dann ebenfalls in dieser Form geschrieben werden können, was unmöglich ist, wie zu Anfang dieses Paragraphen gezeigt wurde.

Hieraus folgt, dass die Kursformel der auf einmal rückzahlbaren Anleihe nur in der DARVILLE-JOHNSON'schen Weise dargestellt werden kann, abgesehen von der Darstellung durch eine Serie von Nomogrammen oder durch Nomogramme mit beweglichen Teilen.



## KAPITEL V.

### Graphische Tabellen für die Berechnung von Kurs und Rentabilität von Obligationen.<sup>1)</sup>

§ 22. Dies ist in deutscher Übersetzung der Titel eines Büchleins, das von dem Amsterdamer Bankhaus LIPPMANN, ROSENTHAL & Co. gratis zur Verfügung gestellt wird, und das auf 22 Seiten Netztafeln für die Kursformel (IV 6) der auf einmal rückzahlbaren Anleihe enthält. Die Kursformel, die vier Veränderliche besitzt, wird in dem Büchlein in der im letzten Teil von § 6 angegebenen Weise behandelt. Nachdem man für  $j$  einen bestimmten Wert  $j_1$  angenommen hat, werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $\varepsilon OH$  (Fig. 11) die Linienscharen

$$(1) \quad \dots \dots \dots \xi = \mu_1 n$$

$$(2) \quad \dots \dots \dots \eta = \mu_2 \cdot 100 x_{(2)}$$

$$(3) \quad \dots \quad \frac{1}{\mu_2} \eta = 100 \frac{j_1}{y} + \left( 100 - 100 \frac{j_1}{y} \right) \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{2} y \right)^{2 \frac{1}{\mu_1} \xi}}$$

konstruiert. Elimination von  $\xi$  und  $\eta$  aus (1), (2) und (3) führt zu

$$(4) \quad \dots \dots \dots x_{(2)} = \frac{j_1}{y} + \left( 1 - \frac{j_1}{y} \right) \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{2} y \right)^{2n}},$$

sodass die nomographische Darstellung richtig ist.

Eine Reihe dieser Nomogramme, von denen jedes für einen bestimmten Wert von  $j$  gilt, füllt die Seiten des Buches, von denen eine in Fig. 11\* abgebildet ist.

Alle Kurven der Schar (3) gehen durch denselben Punkt der  $H$ -Achse, den Punkt nämlich, der zum Kurs 100 gehört.

---

<sup>1)</sup> Grafische Tabellen voor berekening van koers en rendement van obligatiën.  
Copyright 1927, J. L. STIXRUD. LIPPMANN, ROSENTHAL & CO. Amsterdam.

Die Gleichung (3) geht für  $y = j_1$  über in

$$\frac{1}{\mu_2} \eta = 100,$$

sodass die Linie desjenigen reellen Zinsfusses, der dem nominellen Zinsfuss gleich ist, die Gerade  $a$  ist (Fig. 11), die durch den Punkt 100 der  $H$ -Achse geht und der  $\Xi$ -Achse parallel ist.

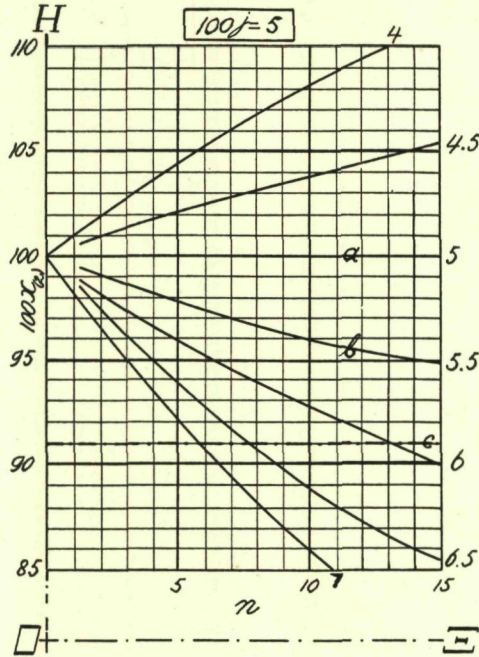


Fig. 11

Durch Substitution eines bestimmten Wertes  $y_1$  für  $y$  in (3) wird eine bestimmte Linie der Schar erzeugt. Für  $\xi = \infty$  konvergiert  $\eta$  gegen den Wert  $\mu_2 \cdot 100 \frac{j_1}{y_1}$ , sodass die Kurve eine der Achse  $O\Xi$  parallele Gerade zur Asymptote hat, deren Gleichung lautet:

$$\eta = \mu_2 \cdot 100 \frac{j_1}{y_1}.$$

So ist in Fig. 11 die Gerade  $c$  die Asymptote der Kurve  $b$ .



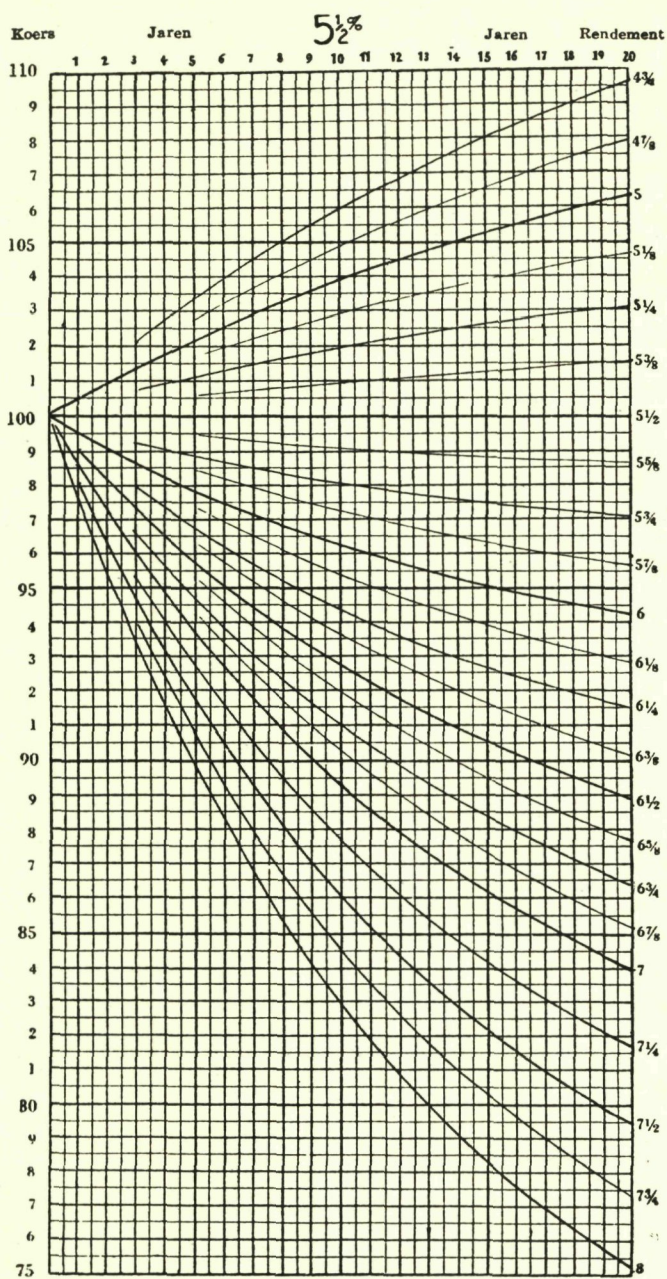


Fig. 11\*



Wie aus (3) folgt, nimmt  $\eta$  mit wachsendem  $n$ , also wachsendem  $\xi$  zu bzw. ab, jenachdem ob  $j_1 < y$  oder  $j_1 > y$  ist. Die Kurven der Schar (3), die nach dem Vorstehenden sämtlich durch den Punkt 100 der  $H$ -Achse gehen, liegen also unter oder über der Geraden  $a$ , jenachdem der nominelle Zinsfuss kleiner oder grösser ist als der reelle. Alle Kurven wenden ihre konkave Seite dieser Geraden zu; aus (3) leitet man nämlich ab:

$$(5) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \left( 100 - 100 \frac{j_1}{y} \right) \{ l^2 (1 + \frac{1}{2} y)^2 \} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} y)^{2 \frac{1}{\mu_1} \xi}}.$$

Nimmt man nun an, dass  $j_1 < y$  ist, so folgt aus (3) und (5), dass  $\eta$  und  $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$  beide positiv sind, sodass die Kurven der Schar (3) konvex hinsichtlich der  $\Xi$ -Achse, also konkav hinsichtlich der Geraden  $a$  (Fig. 11) sind (negative Werte von  $\xi$  können unberücksichtigt bleiben). Nimmt man dagegen an, dass  $j_1 > y$  ist, so liegen, wie oben schon bemerkt wurde, die Kurven oberhalb der Geraden  $a$ .

In diesem Falle ist  $\eta > 0$ , während aus (5) folgt, dass  $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} < 0$  ist. Diese Kurven sind demnach hinsichtlich der  $\Xi$ -Achse konkav, also auch hinsichtlich der Geraden  $a$ .

In den „Graphischen Tabellen“ lässt man  $100j$  mit Intervallen von  $\frac{1}{2}\%$  steigen von 3% bis 8%;  $n$  läuft mit Intervallen von  $\frac{1}{2}$  von 0 bis 50, für  $100j \geq 6\frac{1}{2}\%$  jedoch mit Intervallen von  $\frac{1}{4}$  von 0 bis 25. Der reelle Zinsfuss variiert von 3% bis  $9\frac{1}{2}\%$ ; die Intervalle betragen hierbei  $\frac{1}{8}\%$  oder  $\frac{1}{4}\%$ . Für die Moduln  $\mu_1$  und  $\mu_2$  wurden gewählt:

100j ≤ 6		100j > 6	
n ≤ 20	n > 20	n ≤ 10	n > 10
$\mu_1 = 4\frac{1}{4} \text{ mm}$	$\mu_1 = 2\frac{1}{5} \text{ mm}$	$\mu_1 = 8\frac{1}{2} \text{ mm}$	$\mu_1 = 5\frac{1}{16} \text{ mm}$
$\mu_2 = 5\frac{1}{14} \text{ mm}$	$\mu_2 = 3\frac{1}{8} \text{ mm}$	$\mu_2 = 5\frac{1}{14} \text{ mm}$	$\mu_2 = 3\frac{1}{8} \text{ mm}$

Sind der Kurs, der nominelle Zinsfuss und die Dauer einer Anleihe gegeben, dann findet man die Rentabilität folgendermassen: Man schlägt das Nomogramm auf, das für den gegebenen nomi-

nellen Zinsfuß gilt. Hierin sucht man den Schnittpunkt derjenigen Linie der Schar (1), die zu der gegebenen Dauer  $n$  gehört, mit derjenigen Linie der Schar (2), die mit dem gegebenen Kurs beziffert ist. Die Zahl, womit die diesem Schnittpunkt nächstgelegene Kurve der Schar (3) beziffert ist, gibt den reellen Zinsfuß an.

Sind der nominelle und der reelle Zinsfuß, sowie die Dauer einer Anleihe, gegeben, so kann der Kurs abgelesen werden, indem man in dem passenden Nomogramm den Schnittpunkt derjenigen Linien der Scharen (1) und (3), die mit der Dauer bzw. dem reellen Zinsfuß korrespondieren, bestimmt und die Bezifferung derjenigen Linie der Schar (2) abliest, die diesem Schnittpunkt am nächsten liegt.

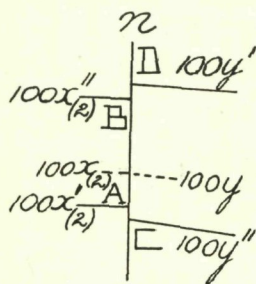
§ 23. Es folgen jetzt einige Bemerkungen über die zu erreichende Genauigkeit.

a. RENTABILITÄTSBESTIMMUNG. — Man findet für den Fehler im Resultat:

$$\frac{3 \times 0,07 \sqrt{J' + 1}}{J} (100 y'' - 100 y') \%$$

wenn das Intervall  $CD = J$  mm und  $AB = J'$  mm ist (Fig. 12).

Am ungünstigsten wird das Resultat für  $100 j = 3$ ,  $n = 3$ ,  $100 y' = 5\frac{3}{4}$ ,  $100 y'' = 6$ . In diesem Falle ist  $J' = 2,54$  mm und  $J = 3,22$  mm und findet man einen Fehler von 0,039 %. Muss auch hinsichtlich der Dauer interpoliert werden, so kann der Fehler 0,075 % betragen.



b. KURSBESTIMMUNG. — Man muss mit einem Fehler von

$$\frac{3 \times 0,07}{\sqrt{J}} (100 x''_{(2)} - 100 x'_{(2)}) \%$$

Fig. 12

rechnen. Dieser Fehler wächst, wenn  $J'$  abnimmt. Der kleinste Wert von  $J'$  ist 1,98 mm, in welchem Falle der Fehler 0,074 % wird. Hierbei ist nicht mit Interpolation hinsichtlich der Dauer gerechnet. Tut man dies wohl, so findet man, dass im ungünstigsten Falle ein Fehler von 0,167 % zu erwarten ist.



Die Resultate besitzen wieder eine hinreichende Genauigkeit. Die mit dem Gebrauch der „Graphischen Tabellen“ verbundenen Vorteile sind nicht so gross wie die, welche man mit der „bond yield chart“ erreichen kann. Dies beruht darauf, dass man Interpolationen hinsichtlich des nominellen Zinsfusses nicht mit dem Auge ausführen kann. Da dies jedoch wohl hinsichtlich der Laufzeit möglich ist, sind Kurs- und Rentabilitätsaufgaben mit Hilfe des Büchleins von LIPPMANN, ROSENTHAL & Co einfacher zu lösen als mit Hilfe einer Kurstabelle. Um dies zu veranschaulichen, lösen wir die Aufgabe von § 19 noch einmal auf, aber jetzt mit Hilfe der „Graphischen Tabellen“.

#### AUFLÖSUNG.

Für  $100j = 4$ ,  $n = 17\frac{1}{3}$  und  $100x_{(2)} = 92$  liest man ab:  $100y = 4,68$

„  $100j = 3\frac{1}{2}$ ,  $n = 17\frac{1}{3}$  „  $100x_{(2)} = 92$  „ „ „ :  $100y = 4,16$

Hieraus folgt für  $100j = 3,92$ :

$$100y = 4,16 + \frac{3,92 - 3\frac{1}{2}}{4 - 3\frac{1}{2}} (4,68 - 4,16) = 4,60.$$

Man vergleiche hiermit die Auflösung in § 19.

§ 24. In den „Graphischen Tabellen“ wird die Gleichung (4) durch zwei Geradenscharen und eine Kurvenschar dargestellt. Wir werden nun untersuchen, ob die Gleichung auch durch ein Nomogramm dargestellt werden kann, das ausschliesslich aus Geraden besteht. Zu diesem Zwecke schreiben wir für (4):

$$(6) \quad (-x_{(2)}) (1 + \frac{1}{2}y)^{2n} + j_1 \{ (1 + \frac{1}{2}y)^{2n} - 1 \} \frac{1}{y} + 1 = 0$$

und setzen

$$(7) \quad (1 + \frac{1}{2}y)^{2n} = \xi \quad \text{und} \quad \{ (1 + \frac{1}{2}y)^{2n} - 1 \} \frac{1}{y} = \eta.$$

Elimination von  $n$  und  $y$  liefert

$$(\xi - 1) \frac{1}{y} = \eta \quad \text{und} \quad \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\xi - 1}{\eta} \right)^{2n} = \xi.$$



Die zweite Form ist nicht linear in  $\xi$  und  $\eta$ . Wenn man nun noch zeigen kann, dass in (7) die Funktionen von  $r$  und  $n$  nicht voneinander zu trennen sind, so ist die Gleichung (4) nicht verstreckbar (§ 5). Nehmen wir zu diesem Zwecke an, dass

$$(1 + \frac{1}{2} y)^{2n} = \frac{a_0 f(y) g(n) + a_1 f(y) + a_2 g(n) + a_3}{b_0 f(y) g(n) + b_1 f(y) + b_2 g(n) + b_3}$$

wäre, so müsste diese Identität für alle Werte von  $n$  und  $y$  gelten. Für  $n=0$  müsste

$$f(y) = - \frac{(a_2 - b_2) g(0) + a_3 - b_3}{(a_0 - b_0) g(0) + a_1 - b_1}$$

sein, oder w.d.i.,  $f(r)$  müsste konstant, also tatsächlich keine Funktion von  $y$  sein. Und für  $n = \frac{1}{2}$  müsste

$$f(y) = - \frac{(a_2 - b_2 - \frac{1}{2} b_2 y) g(\frac{1}{2}) + a_3 - b_3 - \frac{1}{2} b_3 y}{(a_0 - b_0 - \frac{1}{2} b_0 y) g(\frac{1}{2}) + a_1 - b_1 - \frac{1}{2} b_1 y}$$

sein, was dem Vorhergehenden widerspricht.

Die Gleichung (4) kann demnach nicht durch ein aus drei Geradenscharen bestehendes Nomogramm dargestellt werden.

In einem Artikel „*Het samenstellen van Koerstabellen*“<sup>1)</sup> behandelt J. HAGE die graphische Auflösung der Gleichung (I 3). Er gibt  $r$  einen bestimmten Wert  $r_1$ , sodass er erhält:

$$(8) \quad \dots \dots x = \frac{i}{r_1} + \left(1 - \frac{i}{r_1}\right) \frac{1}{(1 + r_1)^n}.$$

Diese Gleichung kann nun allerdings dargestellt werden durch ein Nomogramm aus drei Geradenscharen, nämlich

$$(9) \quad \dots \dots \dots \xi = \mu_1 \cdot 100 i$$

$$(10) \quad \dots \dots \dots \eta = \mu_2 \cdot 100 x$$

$$(11) \quad \dots \quad \frac{1}{\mu_2} \eta = \frac{\xi}{\mu_1 r_1} + \left(100 - \frac{\xi}{\mu_1 r_1}\right) \frac{1}{(1 + r_1)^n}.$$

<sup>1)</sup> Verz.-archief VIII (1927) p. (130).

Elimination von  $\xi$  und  $\eta$  aus (9), (10) und (11) führt zu der Gleichung (8), sodass die Darstellung richtig ist.

Die Geraden der Schar (11) gehen sämtlich durch den Punkt  $P (\mu_1 \cdot 100 r_1, \mu_2 \cdot 100)$  (Fig. 13). Für ihre Schnittpunkte mit der Achse  $OH$  gilt:

$$\eta = \mu_2 \cdot 100 \frac{1}{(1 + r_1)^n},$$

sodass sie mit Hilfe einer Tabelle von  $A_{\overline{n}|}$  einfach bestimmt werden können.

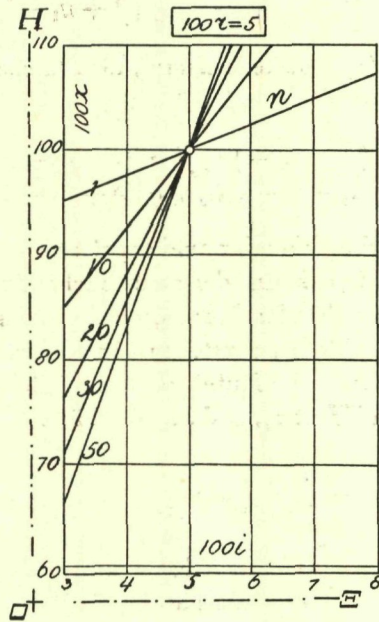


Fig. 13

Indem man der Veränderlichen  $r$  nacheinander verschiedene Werte gibt, konstruiert man eine Serie von Nomogrammen.

Die Nomogrammenserie, die Gleichung (3) darstellt, ist also schnell, bequem und genau konstruierbar. Diesen Vorzügen stehen jedoch schwerwiegende Nachteile gegenüber. Die Individualisierung des reellen Zinsfusses wirkt hinderlich bei der Rentabilitätsbestim-



mung, und die Genauigkeit wird sehr gering, wenn der nominelle und der reelle Zinsfuß wenig voneinander abweichen (siehe Fig. 13).

Wir verdanken HAGE noch eine zweite Auflösung. Man gibt  $n$  einen festen Wert  $n_1$ , wodurch die Gleichung (13) übergeht in

$$(12) \quad . . . . . x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) \frac{1}{(1+r)^{n_1}}.$$

Diese Gleichung lässt sich wieder darstellen durch drei Geraden-scharen, nämlich

$$(13) \quad . . . . . \xi = \mu_1 \cdot 100 i$$

$$(14) \quad . . . . . \eta = \mu_2 \cdot 100 x$$

$$(15) \quad . . . \quad \frac{1}{\mu_2} \eta = \frac{\xi}{\mu_1 r} + \left(100 - \frac{\xi}{\mu_1 r}\right) \frac{1}{(1+r)^{n_1}}.$$

Elimination von  $\xi$  und  $\eta$  aus den drei letzten Gleichungen führt wieder zu (12).

Die Geraden der Schar (15) sind wieder sehr bequem zu konstruieren. Sie erzeugen nämlich durch ihre Schnittpunkte auf der Geraden, die durch den Punkt 100 der  $H$ -Achse geht und der  $\Xi$ -Achse parallel läuft, die reguläre Skala

$$\xi = \mu_1 \cdot 100 r$$

(siehe Fig. 14), während ihre Schnittpunkte mit der Achse  $OH$  mit Hilfe einer Tabelle von  $A_{\overline{n}|}$  einfach zu bestimmen sind.

Durch Variation von  $n$  erhält man die Nomogrammserie.

Wenn Couponsteuer zu berücksichtigen ist, verdient diese zweite Methode von HAGE den Vorzug vor der in dem Büchlein von LIPPMANN, ROSENTHAL & Co. angewandten. Beide Nomogrammserien erfordern eine nicht mit dem Auge auszuführende Interpolation, sodass in dieser Hinsicht beide Lösungen gleichwertig sind. Bei kleinen Werten von  $n$  ist jedoch die nach der zweiten Methode von HAGE konstruierte Nomogrammserie günstiger (man vergleiche die Figuren 11 und 14). Entwirft man die HAGE'schen Nomogramme in derselben Grösse wie die „Graphischen Tabellen“, so kann man bei der Rentabilitätsbestimmung einen Fehler von



0,027 % erwarten gegenüber einem Fehler von 0,039 % bei den „Graphischen Tabellen“ (siehe § 23).

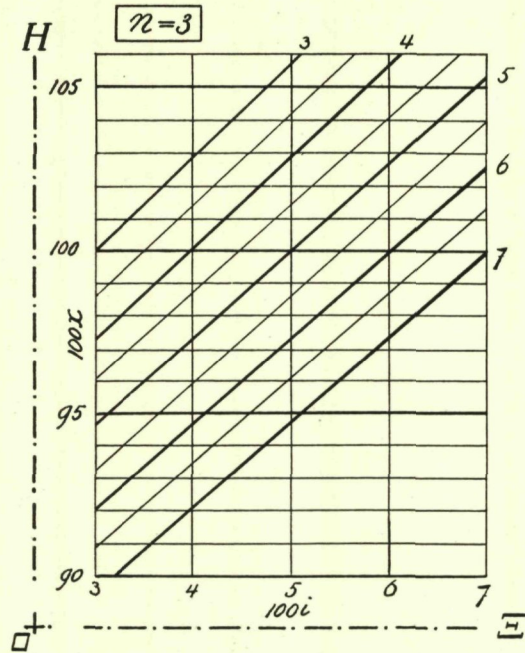


Fig. 14

In dem zitierten Artikel von HAGE wird die Gleichung (I4) in analoger Weise behandelt. Den Plan, vollständige Kurstabellen herauszugeben, hat der Verfasser bisher nicht ausgeführt.



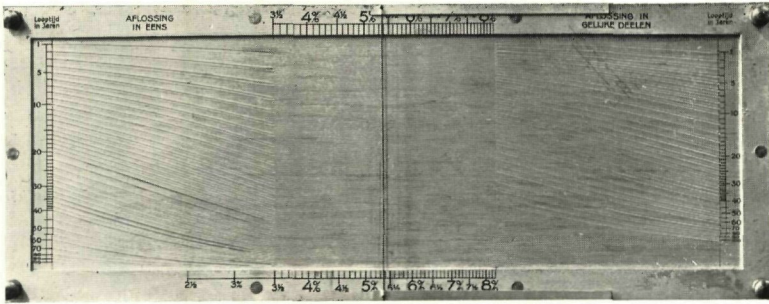


Fig. 15. Wirkl. Grösse :  $33 \times 13$  cm.

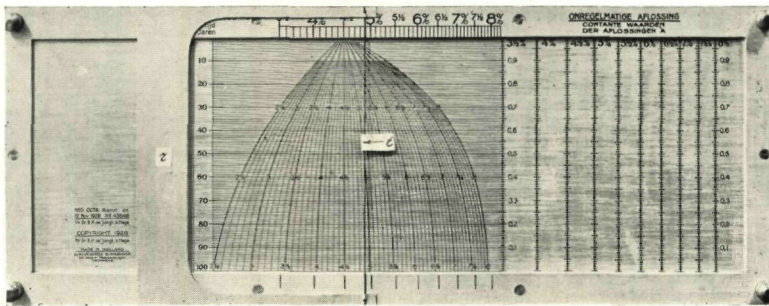


Fig. 16.

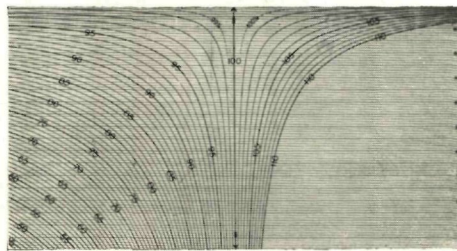


Fig. 17. Wirkl. Grösse :  $18,8 \times 10$  cm.



## KAPITEL VI.

### Der Rentabilitätsmesser von Dr. B. H. de Jongh.<sup>1)</sup>

Patented 12th Nov. 1928. Copyright  
1928 by Dr. B. H. DE JONGH, Published  
by N.V. Uitgevers-Maatschappij v/h  
G. DELWEL, 's-Gravenhage.

§ 25. Dies Instrument bezieht sich auf die folgenden Anleihe-  
typen:

- a. nicht rückzahlbare Anleihen,
- b. auf einmal rückzahlbare Anleihen,
- c. in gleichen Raten tilgbare Anleihen,
- d. Annuitätsanleihen,
- e. Anleihen mit unregelmässiger Tilgung,
- f. Anleihen mit Rückzahlung über pari.

#### *Beschreibung des Instruments.*

Das Instrument besteht aus einer Grundplatte, einem Schieber, einem Läufer und einem Bogen.

Die metallene *Grundplatte* ist von rechteckiger Form und hat sowohl an der Ober- als auch an der Unterseite einen erhöhten Rand. Beide Seiten sind benutzbar. Die eine Fläche trägt zwei eingravierte Linienscharen (Fig. 15), die andere aufgedruckte Linien (Fig. 16). Im Folgenden sprechen wir von der „gravierten“ und der „bedruckten“ Fläche. Die erhöhten Ränder sind an der Längsseite der Grundplatte mit einer Skala versehen.

Der *Schieber* ist eine lose metallene Platte (Fig. 17), die über die Grundplatte hin- und hergeschoben werden kann, wobei die erhöhten Ränder an den Längsseiten der Grundplatte als Gleitbahn

---

<sup>1)</sup> Dies Kapitel stimmt im Wesentlichen überein mit einem von mir verfassten Artikel im Verz.-Archief XV (1934). p. (44).

dienen. Die obere Fläche des Schiebers trägt eine Schar von Kurslinien.

Der *Läufer*  $r$  (Fig. 16) ist ein metallenes Rähmchen, das einen Draht  $t$  (den „Läuferdraht“) trägt, der quer über die gravierte und die bedruckte Fläche läuft. Der Läuferdraht kann mittels des Rähmens in der Längsrichtung der Grundplatte verschoben werden.

Der *Bogen* endlich besteht aus einem eisernen Draht ähnlich

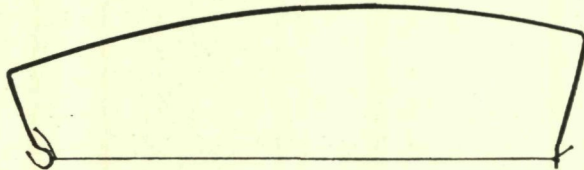


Fig. 18. Wirkl. Länge des Drahtes: 19 cm.

einem Geigenbogen (Fig. 18). Das eine Ende läuft in eine Spitze aus, während das andere in einen Haken umgebogen ist. Durch diese Enden wird ein Draht gespannt gehalten, den wir den „Bogendraht“ nennen.

§ 26. a. *Nicht rückzahlbare Anleihen.* — Hierfür gilt die Kursformel:

$$(I9) \quad \dots \dots \dots x_{(2)} = \frac{j s}{r}.$$

Hieraus folgt:

$$(1) \quad \dots \quad \log 100 \frac{r}{s} - \log 100 j = \log 100 - \log 100 x_{(2)},$$

wodurch (I9) auf die Form (II 13) gebracht ist, sodass sie mit Hilfe eines Gleitinstrumentes, wie in § 9 beschrieben wurde, aufgelöst werden kann.

Bringt man auf dem Randlineal und auf dem Schieber logarithmische Skalen mit gleichem Modul an (Fig. 19), so wird bei einem gegebenen Kurs  $100 x_{(2)}$  und einem gegebenen nominellen Zinsfuss  $100 j$  der reelle Zinsfuss folgendermassen bestimmt:

Man stellt den Schieber so ein, dass der Punkt  $100 x_{(2)}$  des



Schiebers dem Punkte  $100j$  des Lineals gegenüberliegt. Dann liegt gegenüber dem Teilstrich 100 des Schiebers derjenige Punkt des

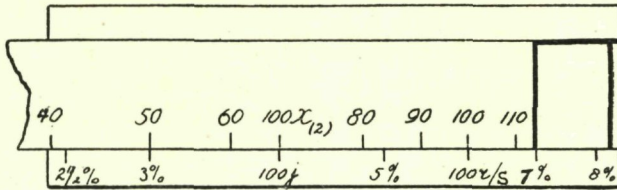


Fig. 19.

Lineals, von dem man den Wert des Ausdrucks  $100 \frac{r}{s}$  ablesen kann. Für den reellen Zinsfuß findet man demnach den Jahresprozentsatz, dessen Hälfte halbjährlich fällig ist. Setzt man  $100 \frac{r}{s} = p$ , so findet man für den jährlich fälligen reellen Zinsfuß:

$$100r = p + \frac{1}{400}p^2.$$

Sind der nominelle Zinsfuß  $100j$  und der reelle Zinsfuß  $100 \frac{r}{s}$  gegeben, und wird nach dem Kurs  $100x_{(2)}$  gefragt, so verfährt man wie folgt:

Man verschiebt den Schieber so, dass der Teilstrich 100 des Schiebers dem Punkte  $100 \frac{r}{s}$  des Randlineals gegenüberliegt. Dann liegt gegenüber dem Skalenpunkt  $100j$  des letzteren der Punkt des Schiebers, von dem man den Kurswert  $100x_{(2)}$  ablesen kann.

Bei dem Rentabilitätsmesser befindet sich die eine logarithmische Skala ( $\mu = 250$  mm) auf dem erhöhten Rand an der Längsseite der gravierten Fläche (Fig. 15). Die andere Skala befindet sich an der Basis des rechteckigen Schiebers. Die auf dem Schieber angebrachten Kurslinien 43, 44, 45 u.s.w. (Fig. 17) schneiden nämlich die Basis in Punkten, deren Abszissen die Werte  $\log 43$ ,  $\log 44$ ,  $\log 45$  u.s.w. haben ( $\mu = 250$  mm).

Die Grösse  $100x_{(2)}$  läuft von 42 bis 110 mit Intervallen von 1;  $100j$  und  $100 \frac{r}{s}$  laufen von  $2\frac{1}{2}$  bis 8,3. Von  $3\frac{1}{2}$  an beträgt das Intervall 0,1.



§ 27. b. Auf einmal rückzahlbare Anleihen. — Die Kursformel ist:

$$(I 10) \quad . . . . x_{(2)} = \frac{js}{r} + \left(1 - \frac{js}{r}\right) \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Diese Gleichung kann ebenfalls durch ein Nomogramm mit gleitenden Scharen (siehe § 9) dargestellt werden. Man konstruiert auf der festen Ebene  $\pi$  (Fig. 20) die Schar zweifach bezifferter Punkte:

$$(2) \quad . . . . \xi = \mu_1 \log 100 \frac{r}{s} \quad \eta = \mu_2 \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \quad (P_1).$$

Diese sind also die Schnittpunkte der Linien der Schar

$$\xi = \mu_1 \log 100 \frac{r}{s}$$

mit den Linien der Schar

$$(2^*) \quad . . . . \eta = \mu_2 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{200} \times 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi}\right)^{2n}},$$

welche Gleichung man durch Elimination von  $r$  aus den Gleichungen (2) erhält.

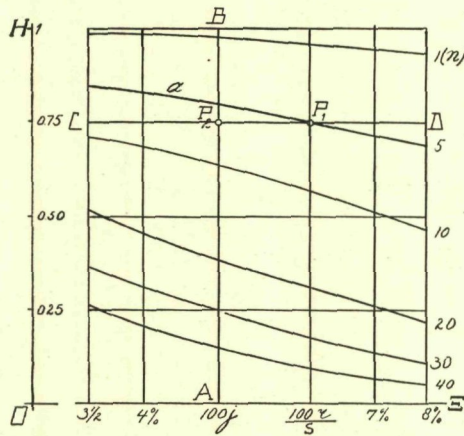


Fig. 20.

Die zweite Punktschar von  $\pi$  erhält man, indem man jedem Punkte der Schar (2) einen andern Punkt zuordnet, der dieselbe

Ordinate, aber die Abszisse  $\mu_1 \log 100 j$  hat. Für diese Schar gilt also

$$(3) \quad \dots \quad \xi = \mu_1 \log 100 j \quad \eta = \mu_2 \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \quad (P_2).$$

Um die Punkte ( $P_2$ ) bequemer angeben zu können, kann man eine Anzahl gerader Linien zeichnen, die der Achse  $O E$  parallel sind.

Auf der Ebene  $\pi'$  (Fig. 21) konstruiert man die Linie

$$(4) \quad \dots \quad \xi' = \mu_1 \log 100 \quad l'_1$$

und die Schar bezifferter Linien (Kurslinien)

$$(5) \quad \dots \quad 100 x_{(2)} = 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'} + \left( 100 - 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'} \right) \frac{1}{\mu_2} \eta' \quad (l'_2).$$

Hierin ist  $x_{(2)}$  ein Parameter.

Wenn  $a$  die Abszisse von  $O'$  in  $E O H$  ist, so ist

$$(6) \quad \dots \quad \xi' = \xi - a \quad \eta' = \eta.$$

Durch Substitution von (6) in (4) und (5) erhält man

$$(7) \quad \dots \quad \xi - a = \mu_1 \log 100 \quad l_1$$

$$(8) \quad \dots \quad 100 x_{(2)} = 10^{\frac{1}{\mu_1} (\xi - a)} + \left\{ 100 - 10^{\frac{1}{\mu_1} (\xi - a)} \right\} \frac{1}{\mu_2} \eta \quad (l_2)$$

Ferner substituiert man in (7) und (8) nacheinander die Koordinaten (2) von  $P_1$  und (3) von  $P_2$ , wodurch man erhält:

$$\mu_1 \log 100 \frac{r}{s} - a = \mu_1 \log 100$$

$$100 x_{(2)} = 10^{\frac{1}{\mu_1} (\mu_1 \log 100 j - a)} + \left\{ 100 - 10^{\frac{1}{\mu_1} (\mu_1 \log 100 j - a)} \right\} \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Durch Elimination von  $a$  aus diesen beiden Gleichungen erhält man (I 10), womit die Richtigkeit der nomographischen Darstellung bewiesen ist.



Für die Schnittpunkte der Kurslinien mit einer Geraden

$$\xi' = \mu_1 \log c$$

findet man:

$$\eta' = \mu_2 \cdot \frac{100 x_{(2)} - c}{100 - c}.$$

d.h. die Kurslinien erzeugen auf jeder Geraden, die der Achse  $O'H'$  parallel ist, eine reguläre Skala. Diese Eigenschaft kann man bei der Konstruktion mit Vorteil benutzen.

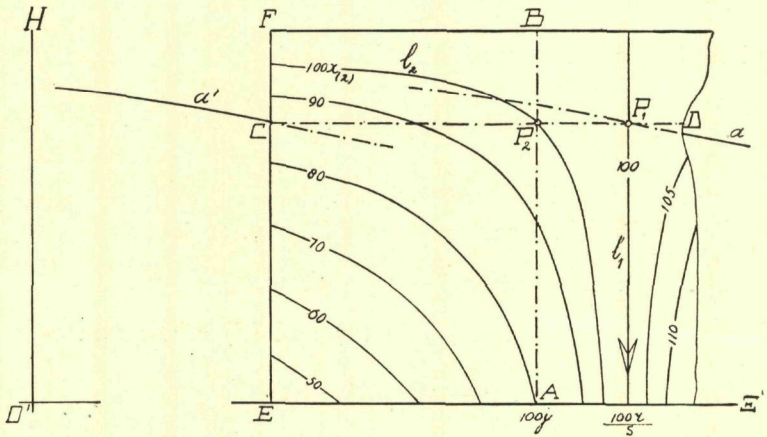


Fig. 21.

Für jeden Wert des Parameters  $x_{(2)}$  stellt Gleichung (5) eine Kurve dar, die aus zwei Ästen besteht. Schreibt man (5) in der Form

$$\eta' = \mu_2 \cdot \frac{100 x_{(2)} - 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'}}{100 - 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'}},$$

dann ist leicht einzusehen, dass diese Kurve drei Asymptoten hat, nämlich

$$\xi' = \mu_1 \log 100, \quad \eta' = \mu_2 \quad \text{und} \quad \eta' = \mu_2 x_{(2)}.$$

Die erste ist identisch mit der Linie  $l_1$  (Fig. 21); sie ist eine gemeinsame Asymptote beider Äste. Die zweite, die Gerade durch



$F$  und  $B$ , ist Asymptote des einen Astes, die dritte ist Asymptote des zweiten Astes. Die Kurve ähnelt einer gleichseitigen Hyperbel. Von jeder Kurve der Schar (5) hat man nur einen Ast nötig.

Wir bringen die Gleichung (5) noch in die Form

$$100 \left( x_{(2)} - \frac{1}{\mu_2} \eta' \right) = 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'} \left( 1 - \frac{1}{\mu_2} \eta' \right).$$

Für  $x_{(2)}=1$  ergibt diese

$$\xi' = \mu_1 \log 100 \quad \text{und} \quad \eta' = \mu_2.$$

Die Kurslinie 100 entartet also in die Linie  $l_1$  und die Gerade  $FB$  (Fig. 21).

Der Entwerfer des Rentabilitätsmessers hat die bewegliche Ebene, den in Fig. 17 abgebildeten Schieber, aus undurchsichtigem Material verfertigt, sodass die Linien  $AB$  und  $CD$  nicht sichtbar sind. Diesem Umstande wird in der folgenden Weise abgeholfen. Die bewegliche Ebene wird an der linken Seite begrenzt von der Geraden  $EF$  im Abstände  $\mu_1$  ( $\log 100 - \log 42$ ) von der Kurslinie 100. Man denke sich nun die  $n$ -Linien der Ebene  $\pi$  um diesen Abstand nach links verschoben. In Fig. 21 stellt  $a'$  die verschobene Linie  $a$  dar. Die Linien  $a'$  sind auf einer Fläche der Grundplatte eingraviert (Fig. 15). Setzt man die Spitze des Bogens (Fig. 18) bei  $C$  in die Furche  $a'$  und lässt man den Bogendraht der Achse  $O'E'$  parallel laufen, dann kann der Bogendraht die Linie  $CD$  ersetzen. Der an die richtige Stelle geschobene Läuferdraht vertritt die Linie  $AB$ .

Sind der nominelle und der reelle Zinsfuß sowie die Laufzeit gegeben, und muss der Kurs bestimmt werden, so bringt man den Schieber mit der Hand in die in Fig. 21 abgebildete Lage.

Wird nach dem reellen Zinsfuß gefragt, so stellt man ein, indem man zunächst den Schieber links auf die Grundplatte legt und die Bogenspitze in den Anfang derjenigen Furche setzt, die zum gegebenen Wert von  $n$  gehört. Dann zieht man den Bogen und damit zugleich den Schieber nach rechts, wobei die Bogenspitze in der Furche entlanggleiten und der Bogendraht den auf dem Schieber angebrachten parallelen Linien (Fig. 17) parallel bleiben muss. Man verschiebt den Schieber in dieser Weise so lange nach rechts, bis der Schnittpunkt des Bogendrahtes mit dem in der richtigen Lage angebrachten Läuferdraht auf die zum gegebenen Kurs

gehörende Kurslinie fällt. Hat man diesen Stand erreicht, so zeigt die Kurslinie 100 den reellen Zinsfuß an.

Wir bemerken noch, dass für die Achsen  $O E$  und  $O' E'$  der Modul  $\mu_1 = 250$  mm und für die Achsen  $O H$  und  $O' H'$  der Modul  $\mu_2 = 100$  mm ist. Die Grössen  $x_{(2)}$ ,  $j$  und  $\frac{r}{s}$  variieren wie oben unter  $a$  angegeben; die Laufzeit  $n$  steigt von 1 bis 100 mit Intervallen von 1, 2, 5 oder 10.

§ 28. c. *Anleihen mit gleichen Tilgungsraten.* — Für Anleihen von diesem Typus gilt die Formel

$$(I\ 11) \quad . \quad . \quad x_{(2)} = \frac{j s}{r} + \frac{1}{n r} \left( 1 - \frac{j s}{r} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\},$$

die durch ein Nomogramm mit gleitender Schar (§ 9) darstellbar ist. Zu diesem Zwecke konstruiert man auf der festen Ebene die Punktschar

$$(9) \quad . \quad . \quad \xi = \mu_1 \log 100 \frac{r}{s} \quad \eta = \mu_2 \frac{1}{n r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} \quad (P_1)$$

und erhält dann eine zweite Punktschar, indem man jedem Punkte der Schar (9) einen Punkt zuordnet, der die gleiche Ordinate aber die Abszisse  $\mu_1 \log 100 j$  hat. Wir schreiben also dafür:

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad \xi = \mu_1 \log 100 j \quad \eta = \mu_2 \frac{1}{n r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} \quad (P_2).$$

Auf die bewegliche Ebene zeichnet man die Linie

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi' = \mu_1 \log 100 \quad l_1$$

und die Schar

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad 100 x_{(2)} = 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'} + \left( 100 - 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'} \right) \frac{1}{\mu_2} \eta' \quad (l'_2)$$

Mit Hilfe der Transformationsformeln (6) kann man  $l_1'$  und  $(l_2')$  auf das Achsensystem der festen Ebene beziehen und erhält dann

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi - a = \mu_1 \log 100 \quad l_1$$

$$(14) \quad . \quad . \quad 100 x_{(2)} = 10^{\frac{1}{\mu_1} (\xi - a)} + \left\{ 100 - 10^{\frac{1}{\mu_1} (\xi - a)} \right\} \frac{1}{\mu_2} \eta \quad (l_2).$$



Nun müssen (9) und (10) nacheinander in (13) und (14) substituiert werden. Man erhält dann

$$\mu_1 \log 100 \frac{r}{s} - a = \mu_1 \log 100$$

$$100x_{(2)} = 10^{\frac{1}{\mu_1}(\mu_1 \log 100j - a)} + \left\{ 100 - 10^{\frac{1}{\mu_1}(\mu_1 \log 100j - a)} \right\} \frac{1}{nr} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}.$$

Eliminiert man  $a$  aus diesen beiden Gleichungen, so gelangt man wieder zu Gleichung (I11).

Die Gleichungen (11) und (12) stimmen völlig überein mit (4) und (5). Die bewegliche Ebene unterscheidet sich denn auch in keiner Weise von der oben unter  $b$  besprochenen.

Um die bewegliche Ebene nicht aus durchsichtigem Material verfertigen zu müssen, verschiebt man die  $n$ -Linien um den Abstand  $\mu_1 (\log 100 - \log 42)$  nach rechts. Beim Rentabilitätsmesser ist diese verschobene Linienschar ebenfalls der Grundplatte eingraviert (Fig. 15).

Für diese Anleihenart wird das Instrument von Dr. DE JONGH in genau derselben Weise benutzt wie für die auf einmal rückzahlbaren Anleihen.

§ 29. *d. Annuitätsanleihen.* — Hierfür gilt die Gleichung:

$$(I5) \quad \dots \dots \dots x = \frac{a_{n|r}}{a_{n|i}}.$$

Man kann diese Beziehung durch ein Nomogramm mit gerichteten bezifferten Scharen (§ 10) darstellen. Auf der festen Ebene  $\pi$  konstruiert man die folgenden Scharen bezifferter Punkte (Fig. 22):

$$(15) \quad \dots \quad \xi = 0 \quad \eta = \mu_2 n \quad (P_1)$$

$$(16) \quad \dots \quad \xi = \mu_1 (\log a_{n|r} - \log a_{n|4^{1/2}}) \quad \eta = \mu_2 n \quad (P_2)$$

$$(17) \quad \dots \quad \xi = \mu_1 (\log a_{n|i} - \log a_{n|4^{1/2}}) \quad \eta = \mu_2 n \quad (P_3).$$

Hierzu sei bemerkt, dass (16) zu derselben Zeichnung führt wie (17); da jedoch in der Praxis  $i \neq r$  ist, werden (16) und (17) in einem gegebenen Falle zwei verschiedene Punkte definieren.



Auf der beweglichen Ebene  $\pi'$  konstruiert man die Linien:

$$(18) \quad \dots \dots \dots \eta' = 0 \quad l_1$$

$$(19) \quad \dots \dots \dots \xi' = \mu_1 \log 100 \quad l'_2$$

und die Schar

$$(20) \quad \dots \dots \dots \xi' = \mu_1 \log 100 x \quad (l'_3).$$

Man bestimmt die Gleichungen von  $l'_1$ ,  $l'_2$  und  $(l'_3)$  hinsichtlich  $\Xi OH$ . Die Transformationsformeln sind:

$$\xi' = a - \xi \quad \text{und} \quad \eta' = b - \eta,$$

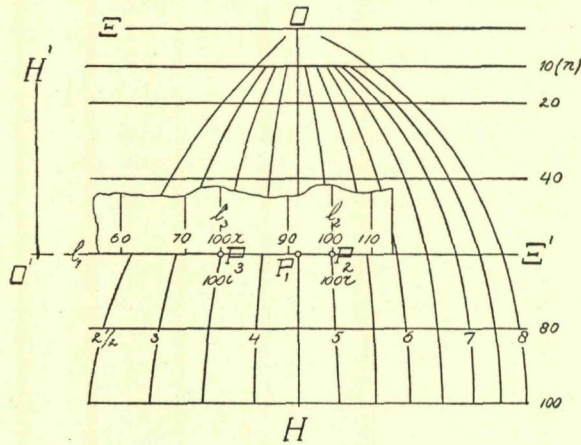


Fig. 22.

worin  $a$  und  $b$  die Koordinaten von  $O'$  in  $\Xi OH$  sind. Man findet:

$$(21) \quad \dots \dots \dots b - \eta = 0 \quad l_1$$

$$(22) \quad \dots \dots \dots a - \xi = \mu_1 \log 100 \quad l_2$$

$$(23) \quad \dots \dots \dots a - \xi = \mu_1 \log 100 x \quad (l_3).$$

In (21), (22) und (23) substituiert man nacheinander die Koordinaten (15), (16) und (17) von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  und erhält

$$b - \mu_2 n = 0$$

$$a - \mu_1 \log a_{\bar{n}|r} + \mu_1 \log a_{\bar{n}|4^{1/2}} = \mu_1 \log 100$$

$$a - \mu_1 \log a_{\bar{n}|i} + \mu_1 \log a_{\bar{n}|4^{1/2}} = \mu_1 \log 100 x.$$

Elimination von  $a$  aus den beiden letzten Gleichungen führt wieder zur Beziehung (15) zurück. Die krummen Linien in Fig. 22 nennt man *Zinslinien*.

Der reelle Zinsfuss  $100r$  wird bei einem gegebenen Kurs  $100x$ , einem gegebenen nominellen Zinsfuss  $100i$  und der gegebenen Laufzeit  $n$  wie folgt gefunden: Man sucht auf  $OH$  den Punkt  $P_1$ , der mit der Laufzeit  $n$  der Anleihe übereinstimmt (Fig. 22). Nun stellt man  $\pi'$  so auf  $\pi$  ein, dass die Achse  $O'E'$  durch  $P_1$  geht und der Achse  $O'E$  parallel läuft. Ausserdem muss der Schnittpunkt der Geraden  $100x$  mit  $O'E'$  auf die Zinslinie  $100i$  fallen. Der Schnittpunkt der Geraden  $100r$  mit  $O'E'$  liegt dann auf der Zinslinie  $100r$ , sodass dieser Wert abgelesen werden kann.

Muss man bei gegebener Laufzeit und gegebenem nominellen und reellen Zinsfuss den Kurs bestimmen, so fängt man wieder damit an, dass man den Punkt  $P_1$  sucht, der zu der gegebenen Laufzeit  $n$  gehört. Die bewegliche Ebene wird dann so auf die Ebene  $\pi$  gelegt, dass  $O'E'$  durch  $P_1$  geht und parallel zu  $O'E$  verläuft. Man sorgt ferner dafür, dass der Schnittpunkt der Linie  $100$  von  $\pi'$  mit  $O'E'$  auf die Zinslinie  $100r$  fällt. Diejenige Gerade von  $\pi'$ , die dann durch den Schnittpunkt der Zinslinie  $100i$  mit der Achse  $O'E'$  geht, ist die Linie  $100x$ , sodass der Wert des Kurses bestimmt ist.

Beim Rentabilitätsmesser sind die Scharen der festen Ebene  $\pi$  der Grundplatte aufgedruckt (Fig. 16). Die äussersten Zinslinien entsprechen den Werten 2,5 und 8 %, die Intervalle betragen 0,1 %. Die Laufzeit variiert von 1 bis zu 100 Jahren mit Intervallen von 1 Jahr. Der oben beschriebene Schieber (Fig. 17) kann als bewegliche Ebene dienen. Fig. 22 zeigt nämlich, dass man die Linien (19) und (20) nicht selbst nötig hat, sondern nur ihre Schnittpunkte mit der Achse  $O'E'$ . Diese Punkte nun werden an der Basis des Schiebers erzeugt durch die auf dem Schieber angebrachten Kurslinien; die Substitution  $\eta' = 0$  in (5) gibt nämlich

$$100x = 10^{\frac{1}{\mu_1} \xi'}$$

oder

$$\xi' = \mu_1 \log 100x,$$

welche Gleichung mit (20) übereinstimmt.

Für die Achsen  $O'E$  und  $O'E'$  ist der Modul  $\mu_1 = 250$  mm, für  $OH$  der Modul  $\mu_2 = 1$  mm genommen.



Das Instrument kann in der oben angegebenen Weise für Annuitätsanleihen benutzt werden.

Zwischen dem in § 15 beschriebenen Tokometer von M. KRAÏTCHIK und dem Rentabilitätsmesser von DE JONGH besteht kein wesentlicher Unterschied, soweit das letztgenannte Instrument Annuitätsanleihen betrifft. In seiner Kritik des erstgenannten Instruments wies SOREAU auf die Ungenauigkeit der Resultate bei kleinen Werten von  $n$  hin. Diese Kritik gilt in noch stärkerem Masse für das Instrument von DE JONGH, weil dies in 3,4 mal kleinerem Massstabe konstruiert ist. Namentlich für  $n$ -Werte, die kleiner als 10 sind, kann man keine grosse Genauigkeit erwarten.

§ 30. *e. Anleihen mit unregelmässiger Tilgung.* — Hierfür gilt die Formel:

$$(I14) \quad \dots \quad x = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{j=m} k_j x_j.$$

Wird der nominelle Zins halbjährlich bezahlt, so hat man in dieser Formel  $x$  durch  $x_{(2)}$  zu ersetzen. Die Grössen  $x_{(2)_1}$ ,  $x_{(2)_2}$  u.s.w. können dann mit Hilfe des Rentabilitätsmessers bestimmt werden in der in § 28 und gegebenenfalls in § 27 angegebenen Weise, wonach  $x_{(2)}$  schnell berechnet werden kann.

Weniger einfach gestaltet sich die Bestimmung des reellen Zinsfusses bei gegebenem Kurs und gegebenem nominellen Zinsfuss. In diesem Falle wählt man zwei Werte  $\left(\frac{r}{s}\right)_1$  und  $\left(\frac{r}{s}\right)_2$ , zwischen denen schätzungsweise der gesuchte reelle Zinsfuss liegt. Mit Hilfe des Rentabilitätsmessers bestimmt man die zu  $j$  und  $\left(\frac{r}{s}\right)_1$  gehörenden Grössen  $x_{(2)_1}$ ,  $x_{(2)_2}$ , ...,  $x_{(2)_m}$  und berechnet den zugehörigen Kurs  $x'_{(2)}$  der ursprünglichen Anleihe. Alsdann bestimmt man in der gleichen Weise den Kurs  $x''_{(2)}$  für den nominellen Zinsfuss  $j$  und den reellen Zinsfuss  $\left(\frac{r}{s}\right)_2$ . Wenn nun

$$x''_{(2)} < x_{(2)} < x'_{(2)}$$



ist, ergibt lineare Interpolation für den gesuchten reellen Zinsfuss:

$$\frac{r}{s} = \frac{(x_{(2)} - x'_{(2)}) \left(\frac{r}{s}\right)_1 + (x'_{(2)} - x_{(2)}) \left(\frac{r}{s}\right)_2}{x'_{(2)} - x_{(2)}}.$$

Bei Anleihen mit unregelmässig steigender Tilgung erhält man brauchbare Werte von  $\left(\frac{r}{s}\right)_1$  und  $\left(\frac{r}{s}\right)_2$ , wenn man unter Festhaltung am gegebenen Kurs und am gegebenen nominellen Zinsfuss den reellen Zinsfuss bestimmt zunächst in der Annahme, dass die Anleihe in gleichen Raten tilgbar, und dann in der Annahme, dass sie auf einmal rückzahlbar sei. Zu dieser Methode gelangt man mittels einer einfachen Überlegung. Nehmen wir zunächst an, dass der Kurs der Anleihe mit unregelmässig steigender Tilgung kleiner als 100 ist, so wird bei jeder Ablösung ein Kursgewinn erzielt. Die Annahme, dass die Anleihe in gleichen Raten tilgbar sei, bedeutet verfrühte Rückzahlung, in diesem Falle also erhöhte Kursgewinne, sie führt demnach zu einem zu hohen reellen Zinsfuss. Die Annahme, dass die Anleihe auf einmal rückzahlbar sei, bedeutet dagegen, dass alle Tilgungen ausser der letzten verspätet erfolgen. Weil nun jede Tilgung Vorteil bringt, wird in diesem Falle der Vorteil zu niedrig bewertet, sodass diese Annahme einen zu niedrigen reellen Zinsfuss ergibt.

Liegt jedoch der Kurs der Anleihe mit unregelmässig steigender Tilgung über 100, so erleidet man bei jeder Ablösung einen Kursverlust. Die Annahme, dass die Tilgung in gleichbleibenden Raten erfolgt, liefert in diesem Falle einen zu niedrigen, die Annahme, dass die Rückzahlung am Ende der Laufzeit auf einmal erfolgt, einen zu hohen reellen Zinsfuss.

Handelt es sich um eine Anleihe mit unregelmässig abnehmender Tilgung, so lehrt eine analoge Überlegung, dass bei einem Kurs unter 100 der reelle Zinsfuss  $\frac{r}{s}$  liegt zwischen demjenigen reellen Zinsfuss, den man findet, wenn man annimmt, dass die Tilgungsraten gleich gross sind, und einem um  $\frac{1}{2}\%$  oder nötigenfalls  $\frac{3}{4}\%$  oder  $1\%$  höheren reellen Zinsfuss. Liegt der Kurs über 100, so findet man, dass der gesuchte reelle Zinsfuss liegt zwischen

demjenigen, den man bei Annahme gleichmässiger Tilgung erhält, und einem, der um  $\frac{1}{2}\%$ , oder gegebenenfalls  $\frac{3}{4}\%$  oder  $1\%$ , niedriger ist.

Die Bestimmung der Grenzen, zwischen denen der gesuchte reelle Zinsfuss liegt, geschieht mit Hilfe des Rentabilitätsmessers.

Wir wenden uns nun zur Beschreibung einer zweiten Methode der Rentabilitätsbestimmung mit Anwendung des Rentabilitätsmessers. Wir gehen dabei aus von der allgemeinen Kursformel:

$$(I8) \quad \dots \quad x_{(2)} = \frac{js}{r} + \left(1 - \frac{js}{r}\right) H.$$

Für die auf einmal rückzahlbare Anleihe ist

$$H = \frac{1}{(1+r)^n}.$$

Die Strecke  $CE$  (Fig. 21) ist der Ordinate von  $P_2$  gleich;  $CE$  stellt also gemäss (3) den Wert von  $H$  dar. In Fig. 21 ist  $CE = 0,75$  sodass man die Linie  $CD$  mit dieser Zahl beziffern könnte. Auf dem Schieber (Fig. 17) sind die hundertfachen Werte dieser Zahlen an der rechten Seite angegeben. Bei gegebenem  $n$  und  $\frac{r}{s}$  kann man nun unmittelbar den Wert von  $\frac{1}{(1+r)^n}$  ablesen. Zu diesem Zwecke wird der Schieber so auf die Grundplatte gelegt, dass die Kurslinie 100 den Punkt  $100 \frac{r}{s}$  auf dem Rande der Grundplatte anweist. Die Spitze des Bogens setzt man an der linken Kante des Schiebers in die zu  $n$  gehörende Furche, hält den Bogendraht parallel zu den auf dem Schieber befindlichen Parallelen und liest an der rechten Kante des Schiebers den gesuchten Wert ab.

Für eine Anleihe mit gleichen Tilgungsraten ist

$$H = \frac{1}{n} a_{\overline{n}|r} = \frac{1}{nr} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}.$$

Diesen Wert kann man laut (10) ablesen, wenn man die der rechten Hälfte der Grundplatte eingravierten Linien benutzt.

Jetzt kehren wir zu der Anleihe mit unregelmässiger Tilgung



zurück. Ihr Nominalbetrag sei  $k$  und die Anleihe sei zerlegbar in  $m$  Teilanleihen mit Tilgung in gleichbleibenden Raten und den Laufzeiten  $n_1, n_2, \dots, n_m$ . Dann ist

$$(24) \quad \dots \dots \dots H = \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{p=m} k_p \frac{1}{n_p} a_{\overline{n_p}|r}.$$

Die Grössen  $\frac{1}{n} a_{\overline{n}|r}$  können in der soeben beschriebenen Weise mit Hilfe des Rentabilitätsmessers bestimmt werden, worauf man  $H$  berechnen kann.

In § 28 wurde die Konstruktion der gravierten Linien folgendermassen beschrieben: Man konstruierte zunächst die bezifferte Linienschar

$$(25) \quad \dots \dots \dots \xi = \mu_1 \log 100 \frac{r}{s}$$

und dann auf jeder Linie der Schar eine Schar bezifferter Punkte.

Die Ordinate eines solchen Punktes ist  $\mu_2 \frac{1}{n} a_{\overline{n}|r}$ , d.h. diese Ordinate ist dem Werte  $H$  gleich. Die „ $n$ -Linien“, die entstehen, wenn man durch die zu gleichen Werten von  $n$  gehörenden Punkte stetige Kurven legt, wurden dann um den Abstand  $\mu_1 (\log 100 - \log 42)$  nach rechts verschoben. Man kann sich aber auch denken, dass die Linien der Schar (25) zuerst um den genannten Abstand verschoben werden, und dass erst dann auf jeder Linie der Schar eine Punktschar konstruiert wird. Diese nach rechts verschobenen Linien, deren Gleichung

$$(26) \quad \dots \quad \xi = \mu_1 \left( \log 100 \frac{r}{s} + \log 100 - \log 42 \right)$$

ist, sind auf der bedruckten Seite der Grundplatte angebracht (Fig. 16). Liegt nun der gesuchte reelle Zinsfuss der Anleihe

mit unregelmässiger Tilgung zwischen  $\left( \frac{r}{s} \right)_1$  und  $\left( \frac{r}{s} \right)_2$ , wobei

$\left( \frac{r}{s} \right)_1 < \left( \frac{r}{s} \right)_2$  ist, so bestimmt man die Werte von  $H$  aus (24),

die zu  $\left( \frac{r}{s} \right)_1$  und zu  $\left( \frac{r}{s} \right)_2$  gehören. Konstruiert man nun auf jeder



der mit  $100 \left( \frac{r}{s} \right)_1$  und  $100 \left( \frac{r}{s} \right)_2$  bezifferten Linien der Schar (26) einen Punkt, dessen Ordinate dem zugehörigen Wert von  $H$  gleich ist, und verbindet man diese Punkte durch eine später wieder zu entfernende Bleistiftkurve, so kann man diese Kurve in derselben Weise benutzen wie eine der in § 28 erwähnten gravierten Linien. Der Schieber wird nun so eingestellt, dass seine rechte Kante mit derjenigen Geraden der Schar (26) zusammenfällt, die mit dem Werte  $100 \left( \frac{r}{s} \right)_2$  beziffert ist. Den Läuferdraht stellt man auf den gegebenen nominellen Zinsfuß ein. Die Spitze des Bogens setzt man auf den Anfangspunkt der Bleistiftkurve, und den Bogendraht hält man parallel zu den Parallelen auf dem Schieber. Man zieht dann, indem man mit der Bogenspitze auf der Bleistiftkurve entlangfährt, den Schieber nach links, bis Bogendraht und Läuferdraht sich auf der zum gegebenen Kurs gehörenden Kurslinie schneiden. Die Kurslinie 100 weist dann den gesuchten reellen Zinsfuß an.

§ 31. *f. Anleihen mit Rückzahlung über pari.* — Eine Kursformel, die für eine à pari rückzahlbare Anleihe eines bestimmten Typus gilt, wird umgeformt für eine Agio-Anleihe desselben Typus, indem man  $j$  und  $x_{(2)}$  ersetzt durch

$$(27) \quad \dots \dots \dots {}^n j = \frac{1}{1+g} j$$

$$(28) \quad \dots \dots \dots {}^n x_{(2)} = \frac{1}{1+g} x_{(2)}.$$

Die Werte von  ${}^n j$  und  ${}^n x_{(2)}$  können mit Hilfe des Rentabilitätsmessers bestimmt werden. Aus (27) folgt nämlich:

$$\log 100 j - \log 100 {}^n j = \log (100 + 100 g) - \log 100.$$

Hiermit ist (27) auf die Form (II 13) gebracht, die, wie in § 9 beschrieben wurde, mit Hilfe eines Gleitinstrumentes dargestellt werden kann.

Man stellt den Schieber so ein, dass die Linie  $100 + 100 g$  durch

den Punkt  $100j$  der Grundplatte geht (Fig. 23). Die Linie 100 des Schiebers geht dann durch den Punkt  $100''j$  der Grundplatte. Der

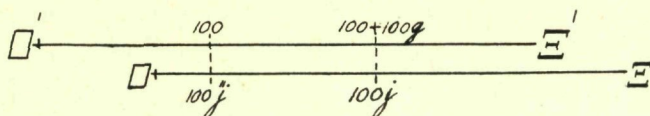


Fig. 23.

Rentabilitätsmesser kann in dieser Weise benutzt werden, da, wie aus § 26 hervorgeht, sowohl auf der Grundplatte wie auf dem Schieber die benötigten Punkte bzw. Linien angebracht sind.

Aus (27) und (28) folgt:

$$\log 100j - \log 100''j = \log 100x_{(2)} - \log 100''x_{(2)}.$$

Auch diese Beziehung kann durch ein Gleitinstrument dargestellt werden.

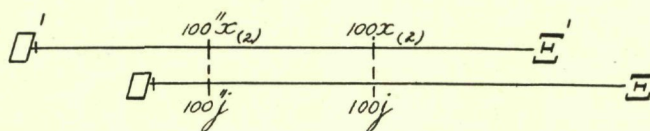


Fig. 24.

Man stellt den Schieber so ein, dass die Linie, die mit dem gegebenen Kurs  $100x_{(2)}$  übereinstimmt, auf dem zu dem gegebenen nominellen Zinsfuß  $100j$  gehörenden Punkte der Platte liegt (Fig. 24). Durch den soeben gefundenen Punkt  $100''j$  der Platte geht dann die Kurslinie  $100''x_{(2)}$ . Nachdem man so mit dem Rentabilitätsmesser die Werte von  $100''j$  und  $100''x_{(2)}$  ermittelt hat, kann man ihn weiter benutzen in der für den betreffenden Anleihtyp ohne Aufgeld angegebenen Weise.

§ 32. Die mit dem Rentabilitätsmesser von DE JONGH zu erreichende Genauigkeit kann in der gleichen Weise bestimmt werden wie bei den Instrumenten von KRAÏTCHIK und DARVILLE-JOHNSON. Man findet dann, dass man mit den folgenden Fehlern rechnen muss:



	Fehler in $\frac{100 r}{s}$	Fehler in $100 x_{(2)}$
Nicht rückzahlbare Anleihen . . . .	0.02 (0.02)	0.41 (0.41)
Auf einmal rückzahlbare Anleihen .	0.03 (0.03)	0.35 (0.35)
In gleichen Raten tilgbare Anleihen .	0.03 (0.03)	0.25 (0.25)

Für die Annuitätsanleihe findet man:

Fehler in $100 r$	Fehler in $100 x$
0,06 (0.07)	0,36 (0.41)

Die eingeklammerten Zahlen gelten, wenn Couponsteuer zu berücksichtigen ist.

Was die Kursbestimmung angeht, so bietet das Instrument nach unserer Meinung zu wenig Genauigkeit; dagegen ist die bei der Rentabilitätsbestimmung erzielte Genauigkeit als ausreichend zu erachten. Wenn wir uns deshalb jetzt auf die Rentabilitätsbestimmung beschränken, so ist zunächst festzustellen, dass das Instrument nicht alle Vorteile gewährt, die mit dem Gebrauch graphischer Kurstafeln erreicht werden können. Zunächst liefert es, ausser für Annuitätsanleihen, den Wert von  $\frac{100r}{s}$ , sodass für die Bestimmung von  $100 r$  noch eine kleine Berechnung erforderlich ist. Ausserdem kann eine etwa erforderliche Interpolation hinsichtlich der Laufzeit nicht mit dem Auge erfolgen, ein Umstand, der als ein Mangel empfunden wird, wenn es sich um eine auf einmal rückzahlbare Anleihe handelt. Vorteilhaft ist die Benutzung des Instruments für nicht rückzahlbare und, wenn Couponsteuer zu berücksichtigen ist, auch für auf einmal rückzahlbare Anleihen, ferner für in gleichen Raten tilgbare Anleihen und für Annuitätsanleihen.

Die Gerade „100“ der beweglichen Ebene weist auf der auf dem unteren Rande der Grundplatte angebrachten Skala den Wert von  $\frac{100r}{s}$  an. Wenn man nun auf dem oberen Rande die Skala



$\xi = \log \frac{100r}{s}$  anbrächte, so würde die Kurslinie „100“ des Schiebers auf dieser Skala den Wert von  $100r$  direkt anweisen, sodass sich das Arbeiten mit  $\frac{100r}{s}$  erübrigen würde.

Ein Vorzug des Instruments ist, dass es für so viele verschiedene Anleihentypen Verwendung finden kann.

---

## KAPITEL VII.

### Neue Nomogramme.

§ 33. Wir werden jetzt für die verschiedenen Anleihtypen der Reihe nach angeben, welches der vorhandenen Instrumente oder Nomogramme man am zweckmässigsten an Stelle der Kurstabelle benutzt. Wenn dabei Fälle auftreten, für die keine geeigneten Nomogramme existieren, so werden wir untersuchen, ob sich nomographische Hilfsmittel entwerfen lassen, die mit Vorteil an Stelle von Kurstabellen gebraucht werden können. Bei der Bestimmung sowohl des Kurses als auch der Rentabilität gehen wir von *jährlicher Fälligkeit* des reellen Zinses aus.

a. *Auf einmal rückzahlbare Anleihen.* Für Obligationen mit Halbjahrescoupons stehen das Instrument von DARVILLE-JOHNSON, das von DE JONGH und die graphischen Tabellen von LIPPMANN, ROSENTHAL & Co. zur Verfügung.

Die bond yield chart von DARVILLE-JOHNSON ist ein vorteilhafter Ersatz für die Kurstabelle. Die abgelesenen Resultate sind hinreichend genau, da man bei der Kursbestimmung mit einem Fehler von 0,24 % zu rechnen hat, während der Fehler bei der Rentabilitätsbestimmung nicht grösser ist als 0,02 %.

Wenn man die Extremwerte des nominellen Zinsfusses und auch des Kurses etwas näher beieinander wählen würde, so könnte man mit Beibehaltung der genannten Genauigkeit die Masse des Instruments verkleinern, etwa bis auf eine Grösse von  $20 \times 25$  cm, und ihm auf diese Weise ein bequemer zu hantierendes Format geben. Es erscheint uns auch nicht notwendig, das Instrument auf einer hölzernen Platte anzubringen, es könnte wohl auch auf starken Karton gedruckt werden. Hierdurch würde es nicht nur für den praktischen Gebrauch bequemer sondern auch billiger werden.

Die bond yield chart verdient den Vorzug vor den graphischen Tabellen von LIPPMANN, ROSENTHAL & Co., weil

1. das Instrument hinsichtlich des nominellen Zinsfusses Interpolation mit dem Auge gestattet, die graphischen Tabellen dagegen nicht;



2. die bond yield chart die notwendigen Daten auf einem einzigen Blatt vereinigt, während sie bei den graphischen Tabellen über mehrere Seiten verteilt sind;
3. die bond yield chart auch für nicht rückzahlbare Anleihen Verwendung finden kann.

Das Instrument von DARVILLE-JOHNSON verdient auch den Vorzug vor dem Rentabilitätsmesser von DE JONGH, und zwar aus folgenden Gründen:

1. bei zwischenzeitlicher Kursbestimmung führt lineare Interpolation zwischen zwei benachbarten ganzzahligen Werten von  $n$  zum richtigen Resultat; die bond yield chart gestattet Interpolation mit dem Auge, der Rentabilitätsmesser dagegen nicht;
2. die bond yield chart ist einfacher im Gebrauch als das Instrument von DE JONGH;
3. die mit der bond yield chart zu erreichenden Resultate sind genauer als die, welche man mit dem Rentabilitätsmesser erhält.

Beim Gebrauch der bond yield chart muss entweder der Wert von  $100r$  aus dem von  $\frac{100r}{s}$  oder umgekehrt der Wert von  $\frac{100r}{s}$  aus dem von  $100r$  berechnet werden. Das Nomogramm kann jedoch so konstruiert werden, dass dieser Nachteil wegfällt. Ersetzt man nämlich in (IV 2, 3 und 4)  $y$  durch  $\frac{r}{s}$ , und gibt man dann  $r$  verschiedene, durch runde Zahlen dargestellte Werte, so entsteht ein Nomogramm, das für halbjährliche Couponfälligkeit und für jährliche Fälligkeit des reellen Zinses gilt. In Fig. 25 ist dies Nomogramm abgebildet.

Für auf einmal rückzahlbare Anleihen mit Jahrescoupons existieren keine nomographischen Hilfsmittel. Man kann jedoch ein dem in Fig. 25 abgebildeten entsprechendes Nomogramm für jährliche Couponfälligkeit konstruieren. Zu diesem Zwecke bringt man (I 3) auf die Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 100x \\ 0 & 1 & -100i \\ r & 1 - \frac{1}{(1+r)^n} & \frac{100r}{(1+r)^n} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Formeln (II 11) geben:

$$\xi = -d$$

$$\eta = -\mu_1 \cdot 100 x$$

$$\xi = d$$

$$\eta = \mu_2 \cdot 100 i$$

$$\xi = \frac{\mu_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} - \mu_2 r}{\mu_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} + \mu_2 r} d \quad \eta = - \frac{100 \mu_1 \mu_2 \frac{r}{(1+r)^n}}{\mu_1 \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\} + \mu_2 r}.$$

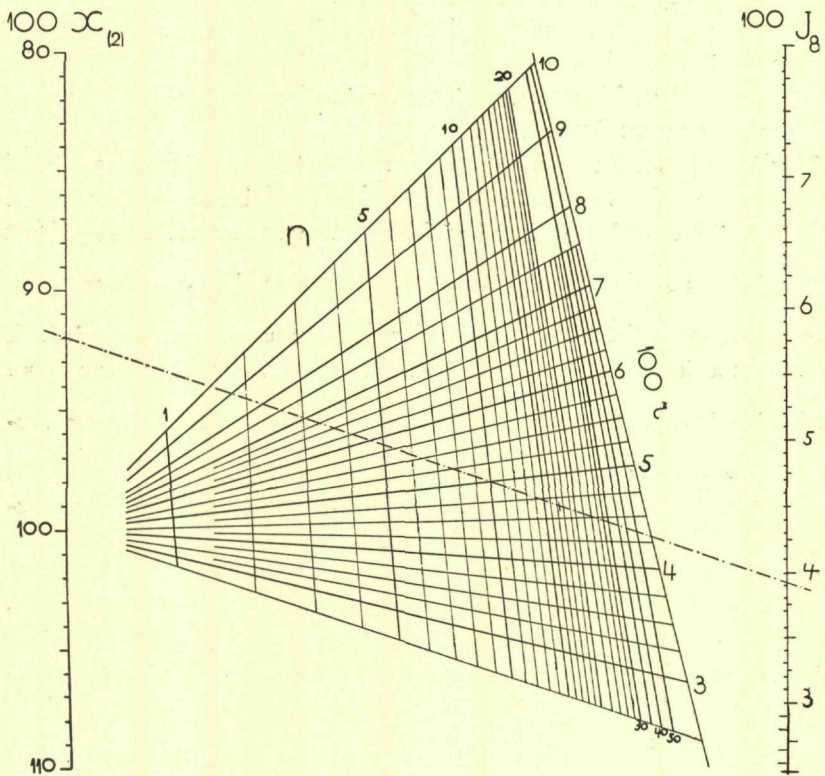


Fig. 25.

Das Nomogramm enthält demnach zwei Skalen auf geraden parallelen Trägern nebst einem Netz zweifach bezifferter Punkte.



Die beiden Skalen beziehen sich auf den Kurs bzw. den nominellen Zinsfuß; das Netz besteht aus einem Strahlenbüschel, dessen Strahlen verschiedene Werte des reellen Zinsfußes, und aus einer Kurvenschar, deren Elemente die Laufzeiten repräsentieren.

Das so erhaltene Nomogramm kann für die auf einmal rückzahlbare Anleihe mit Jahrescoupons dieselben wichtigen Dienste leisten wie das in Fig. 25 dargestellte für die Anleihe mit Halbjahrescoupons.

Wenn man für die auf einmal rückzahlbaren Anleihen an Stelle von numerischen Kurstabellen das in Fig. 25 abgebildete Nomogramm, bzw. für Anleihen mit Jahrescoupons das erwähnte gleichartige Nomogramm, benutzt, kann man erhebliche Ersparnisse an Arbeit und Zeit erzielen.

*b. Nicht rückzahlbare Anleihen.* Auch für diesen Anleihtyp können die Kurstabellen mit Vorteil ersetzt werden durch das in Fig. 25 abgebildete Nomogramm, wenn die Obligationen mit Halbjahrescoupons ausgestattet sind, bzw. durch ein entsprechendes Nomogramm, wenn der nominelle Zins in jährlichen Raten fällig ist.

*c. In gleichen Raten tilgbare Anleihen.* Das Instrument von DE JONGH kommt in Betracht, wenn der nominelle Zins halbjährlich fällig ist. Wir haben jedoch gefunden, dass man für diesen Fall ein Nomogramm konstruieren kann, das aus verschiedenen Gründen dem Rentabilitätsmesser gegenüber den Vorzug verdient. Die Gleichung (I11) kann nämlich auf die Form

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 100 x_{(2)} \\ 0 & 1 & -100 j \\ \frac{r}{s} & 1 - \frac{1}{n} a_{\overline{n}|r} & \frac{1}{n} a_{\overline{n}|r} \cdot 100 \frac{r}{s} \end{array} \right| = 0$$

gebracht werden. Hieraus folgt, dass diese Gleichung durch eine Fluchtentafel dargestellt werden kann. Diese ist wieder von derselben Art wie das in Fig. 25 abgebildete Nomogramm. Sie bietet der Kurstabelle gegenüber nur dann Vorteile, wenn Couponsteuer

berücksichtigt werden muss. Wir geben ihr den Vorzug dem Rentabilitätsmesser gegenüber aus den folgenden Gründen:

1. eine Berechnung von  $\frac{100r}{s}$  aus  $100r$ , bzw. von  $100r$  aus  $\frac{100r}{s}$ , ist nicht notwendig;
2. das Resultat besitzt grössere Genauigkeit;
3. das Nomogramm ist einfacher im Gebrauch.

Für diesen Anleihtyp existieren keine nomographischen Hilfsmittel, wenn die Obligationen mit Jahrescoupons ausgestattet sind. Bei einer Untersuchung ergab sich, dass die in diesem Falle geltende Kursformel (I4) durch eine Fluchtentafel dargestellt werden kann. (I4) lässt sich nämlich umformen in:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 100x \\ 0 & 1 & -100i \\ r & 1 - \frac{1}{n} a_{\overline{n}|r} & \frac{1}{n} a_{\overline{n}|r} \cdot 100r \end{array} \right| = 0.$$

Wieder entsteht ein Nomogramm, das dem in Fig. 25 abgebildeten gleichartig ist.

Es ist nur dann vorteilhafter im Gebrauch als eine Kurstabelle<sup>1)</sup>, wenn man Couponsteuer zu berücksichtigen hat, denn man kann auch in diesem Falle die Ableselinie unmittelbar in die richtige Lage bringen.

Die beiden besprochenen Nomogramme können Zeit- und Arbeitsersparnisse verschaffen; diese sind freilich weniger erheblich als diejenigen, welche man im Falle der auf einmal rückzahlbaren Anleihe erzielt durch den Gebrauch des in Fig. 25 abgebildeten Nomogramms, bzw. des entsprechenden Nomogramms für jährliche Fälligkeit des nominellen Zinses.

<sup>1)</sup> d.h. eine für diesen Zweck eigens zu errechnende numerische Kurstabelle. Soweit uns bekannt ist, existiert nämlich für die in gleichen Raten tilgbare Anleihe keine Tabelle, die ausschliesslich jährliche Zinsfälligkeit zur Grundlage hat. Bei geringer Divergenz zwischen dem nominellen und dem reellen Zinsfuss würde eine solche Tabelle nicht nennenswert abweichen von der in Kapitel I erwähnten Tabelle von ROLLINS.



d. *Annuitätsanleihen*. In § 14 machten wir die Bemerkung, dass das Nomogramm von KRAÏTCHIK verbesserungsfähig ist. Hierauf bezieht sich Fig. 5. Bei der Konstruktion für den praktischen Gebrauch nahmen wir in (III 15, 16, 17 und 18)  $\mu_1 = 3$  mm und  $\mu_2 = 1000$  mm. Den Kurs liessen wir mit Intervallen von  $\frac{1}{4}\%$  oder  $\frac{8}{1}\%$ , den nominellen und den reellen Zinsfuss mit Intervallen von 0,05 % ansteigen. Es entsteht dann ein Nomogramm in der Grösse von  $30 \times 12$  cm. Nur an einer Stelle nähern sich die Linien einer Schar bis auf 1 mm; sonst ist ihr gegenseitiger Abstand überall grösser. Die Fehler, mit denen man zu rechnen hat, betragen:

Kursbestimmung	Rentabilitätsbestimmung
Fehler in 100 $x$	Fehler in 100 $r$
0.05 (0.11)	0.009 (0.011)

Die eingeklammerten Zahlen gelten, wenn Couponsteuer zu berücksichtigen ist. Für die Ebene  $\pi'$  gebrauchten wir Karton und für  $\pi$  Pausleinen.

Dies Nomogramm kann mit Vorteil Verwendung finden, wenn die Obligationen mit Jahrescoupons ausgestattet sind und die Coupons der Besteuerung unterliegen.

Kein einziges nomographisches Hilfsmittel steht zur Verfügung, wenn es sich um Anleihen mit Halbjahrescoupons handelt. Es ist uns nicht geglückt, für die in diesem Falle geltende Gleichung (I 12) ein geeignetes Nomogramm zu konstruieren. Bei der Konstruktion stiessen wir auf das anscheinend unvermeidliche Hindernis, dass das Nomogramm zwei verschiedene Skalen der Veränderlichen  $r$  enthalten müsste, sodass es unbrauchbar wird, wenn  $r$  als Unbekannte auftritt.

Wohl kann man die Gleichung (I 12) durch eine Nomogrammenreihe darstellen. Erteilt man der Veränderlichen  $n$  einen bestimmten (ganzzahligen) Wert  $n_0$ , so geht (I 12) über in:

$$(1) \quad \dots \quad x_{(2)} = 1 - \frac{r-j}{r-j} s \left( 1 - \frac{a_{n_0|r}}{a_{n_0|j}} \right).$$

Diese Gleichung ist darstellbar durch ein Nomogramm, das aufgebaut ist aus den drei Linienscharen:

$$(2) \quad \dots \dots \dots \quad \xi = \mu_1 \cdot 100 j$$

$$(3) \quad \dots \dots \dots \quad \eta = \mu_2 \cdot 100 x_{(2)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\mu_2} \eta = 100 - \frac{r - \frac{1}{\mu_1 \cdot 100} \xi s}{r - \frac{1}{\mu_1 \cdot 100} \xi} \left( 1 - \frac{a_{\overline{n_0}|r}}{a_{\overline{n_0}|} \frac{1}{\mu_1 \cdot 100} \xi} \right).$$

Elimination von  $\xi$  und  $\eta$  aus (2), (3) und (4) führt wieder zu (1). Man erhält eine Zeichnung, die der in Fig. 14 abgebildeten ähnlich ist, nur sind die Linien, die sich auf  $r$  beziehen, nicht gerade, sondern flach gekrümmt.

Durch Variation von  $n$  erhält man die Nomogrammenseerie. Jedes Nomogramm gilt für einen bestimmten Wert von  $n$ . Interpolation hinsichtlich  $n$  kann deshalb nicht mit dem Auge erfolgen, was jedoch bei dieser Anleihenart kein Nachteil ist.

Bei der Konstruktion wählten wir  $\mu_1 = 20$  mm und  $\mu_2 = 8$  mm. Den Kurs liessen wir mit Intervallen von  $\frac{1}{4}\%$ , den nominellen Zinsfuss mit Intervallen von  $\frac{1}{10}\%$  und den reellen Zinsfuss mit Intervallen von  $\frac{1}{4}\%$  ansteigen. Wir erhielten sehr übersichtliche Nomogramme von  $8 \times 22,4$  cm Grösse, sodass man zwei Nomogramme auf einer Seite unterbringen kann. Lässt man  $n$  alle ganzzahligen Werte bis 50 durchlaufen, so hat man alle Nomogramme in einem Büchlein mit nur 25 Seiten zusammengefasst.

Die zu erreichende Genauigkeit ist ausreichend; bei Berücksichtigung von Couponsteuer fanden wir, dass man auf keine grösseren Fehler zu rechnen braucht als  $0.07\%$  bei der Kursbestimmung und  $0,026\%$  bei der Rentabilitätsbestimmung.

Wenn Couponsteuer berücksichtigt werden muss, bietet die Benutzung dieser Nomogrammenseerie Vorteile gegenüber dem Gebrauch einer Kurstabelle.



§ 34. Bei zwischenzeitlicher Kursbestimmung muss man oft von der Formel

$$(I\ 15) \quad \dots \quad x_{n-u} = (1 + u r) x_n - u i$$

Gebrauch machen. Diese lässt sich umformen in die Gestalt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_n \\ -r & 1 & i \\ 1 & u & -x_{n-u} \end{vmatrix} = 0$$

und kann deshalb durch eine Fluchtentafel dargestellt werden.

Die Formeln (II 11) geben:

$$\xi = -d \qquad \eta = \mu_1 x_n$$

$$(5) \quad \dots \quad \xi = \frac{\mu_1 + \mu_2 r}{\mu_1 - \mu_2 r} d \qquad \eta = -\frac{\mu_1 \mu_2 i}{\mu_1 - \mu_2 r}$$

$$(6) \quad \dots \quad \xi = \frac{\mu_1 u - \mu_2}{\mu_1 u + \mu_2} d \qquad \eta = \frac{\mu_1 \mu_2 x_{n-u}}{\mu_1 u + \mu_2}.$$

Das Nomogramm enthält demnach eine Skala auf geradem Träger nebst zwei Scharen von zweifach bezifferten Punkten.

Die erste der Gleichungen (5) definiert eine Schar paralleler Geraden. Elimination von  $r$  aus den Gleichungen (5) ergibt

$$\xi = -\frac{2\eta + \mu_2 i}{\mu_2 i} d.$$

Dies ist die Gleichung eines Strahlenbüschels, dessen Zentrum der Punkt  $A (-d, 0)$  ist. Die Geraden lassen sich einfach konstruieren, da sie auf der Achse  $OH$  die reguläre Skala  $\eta = -\frac{1}{2} \mu_2 i$  erzeugen.

Auch die erste der Gleichungen (6) definiert eine Parallelschar. Eliminiert man  $u$  aus den Gleichungen (6), so ergibt sich:

$$\xi = \frac{-2\eta + \mu_1 x_{n-u}}{\mu_1 x_{n-u}} d$$

Dies ist wieder ein Strahlenbüschel, dessen Zentrum der Punkt

$B(d, o)$  ist. Die Strahlen dieses Büschels erzeugen auf dem geradlinigen Skalenträger (von  $x_n$ ) die reguläre Skala  $\eta = \mu_1 x_{n-u}$ . Jede der beiden Scharen von zweifach bezifferten Punkten wird durch zwei Geradenscharen erzeugt (Fig. 26). Das Nomogramm ist also sehr einfach zu konstruieren. Obwohl (I15) fünf Veränderliche enthält, ist nur eine einzige Einstellung der Ableselinie erforderlich, um den Wert von  $x_n$  ablesen zu können. Bei der Konstruktion von Fig. 26 wählten wir  $\mu_1 = 2,5$  mm,  $\mu_2 = 10$  mm und  $d = 59,5$  mm. Die Masse des Nomogramms werden dann  $11,2 \times 17,5$  cm. Teilen

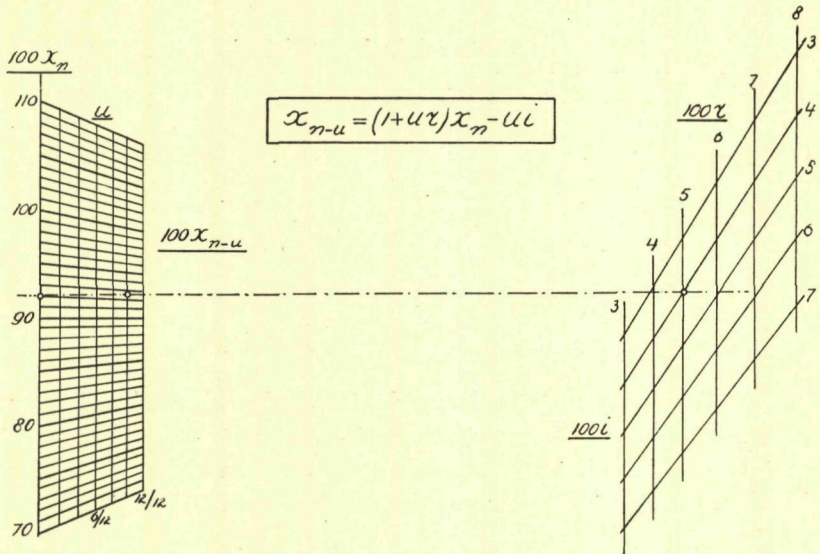


Fig. 26.

wir die Kursskala in halbe Prozente ein, so ist die zu erreichende Genauigkeit durch einen Maximalfehler von 0,11 % charakterisiert. Für den praktischen Gebrauch kann das Nomogramm jedoch sehr wohl in der doppelten Grösse konstruiert werden. Der Maximalfehler beträgt dann 0,05 %.

Die Vorteile, die mit dem Gebrauch der allgemeinen Kurstafeln verbunden sind, sind nicht so gross wie die, welche man beim Gebrauch der speziellen erzielen kann, aber doch immer noch beträchtlich. Darum haben wir auch untersucht, ob die allgemeinen Kursformeln (1) und (8) nomographisch darstellbar sind.



Die Gleichung

$$(1) \quad \dots \quad x = \frac{i}{r} + \left(1 - \frac{i}{r}\right) H$$

kann umgeformt werden in die Gestalt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -i \\ r & 1-H & Hr \end{vmatrix} = 0.$$

Sie kann demnach durch eine Fluchtentafel (§ 8) dargestellt werden.

Anwendung der Formeln (II 11) ergibt:

$$\begin{aligned} \xi &= -d & \eta &= -\mu_1 x \\ \xi &= d & \eta &= \mu_2 i \\ (7) \quad \xi &= \frac{\mu_1(1-H) - \mu_2 r}{\mu_1(1-H) + \mu_2 r} d & \eta &= -\frac{\mu_1 \mu_2 H r}{\mu_1(1-H) + \mu_2 r}. \end{aligned}$$

Eliminiert man die Grösse  $H$  aus den Gleichungen (7), so ergibt sich:

$$(8) \quad \dots \quad \xi = \frac{2\eta + \mu_1 - \mu_2 r}{\mu_1 + \mu_2 r} d.$$

Dies ist die Gleichung eines Strahlenbüschels mit dem Punkte  $(-d, -\mu_1)$  als Träger. Die Strahlen erzeugen auf dem Skalenträger  $\xi = d$  die reguläre Skala  $\eta = \mu_2 r$ .

Eliminiert man die Grösse  $r$  aus den Gleichungen (7), so erhält man:

$$(9) \quad \dots \quad \xi = \frac{2\eta + \mu_1 H}{\mu_1 H} d.$$

Auch dies ist ein Strahlenbüschel. Der Punkt  $(d, 0)$  ist der Träger, und die Strahlen erzeugen auf dem Skalenträger  $\xi = -d$  die reguläre Skala  $\eta = -\mu_1 H$ .

Das Nomogramm ist demnach aufgebaut aus zwei Skalen auf

geraden Trägern und einem Netz zweifach bezifferter Punkte, erzeugt von zwei Strahlenbüscheln (siehe Fig. 27). Die Konstruktion ist sehr einfach und erfordert wenig Zeit.

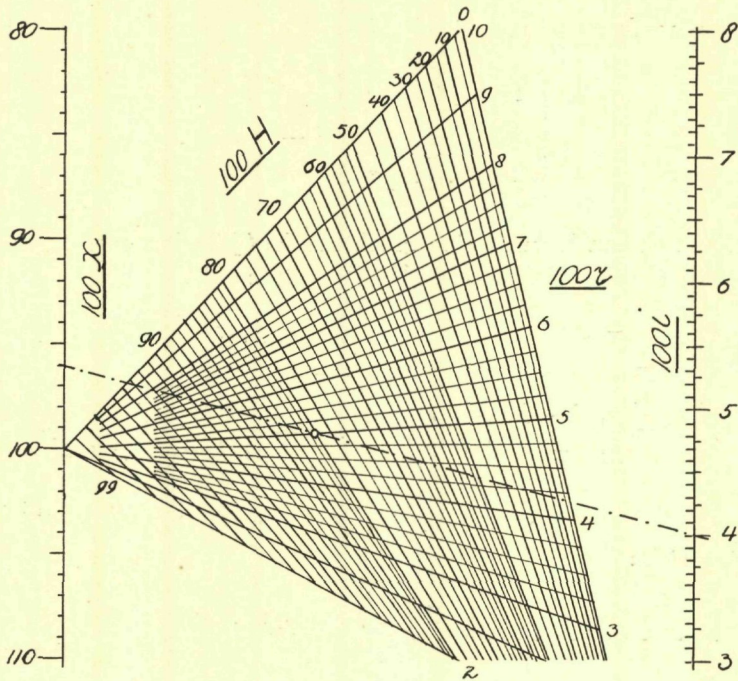


Fig. 27.

Was die Genauigkeit betrifft, wird man, wenn man die Masse  $24 \times 24$  cm wählt, rechnen müssen mit Fehlern von 0,21 % bei der Kursbestimmung und 0,02 % bei der Rentabilitätsbestimmung. Hierbei ist angenommen, dass auch Couponsteuer zu berücksichtigen ist. Ist das nicht der Fall, so sind die Fehler kleiner.

Die allgemeine Kursformel (8), die sich auf Anleihen mit Halbjahrescoupons bezieht, führt zu einem ähnlichen Nomogramm. Der einzige Unterschied mit dem in Fig. 27 abgebildeten besteht darin, dass die Strahlen des zu (8) analogen Strahlenbüschels auf der Geraden  $\xi = d$  die Skala  $\eta = \mu_2 \frac{r}{s}$  erzeugen.



§ 35. Wir fassen nun das Vorstehende zusammen.

Die Lösung von Kurs- und Zinsaufgaben wird durch die Anwendung von Nomogrammen vereinfacht. Numerische Kurstabellen können mit Vorteil durch die hierunter angegebenen Nomogramme ersetzt werden.

*Nicht rückzahlbare und auf einmal rückzahlbare Anleihen.*

Das in Fig. 25 abgebildete Nomogramm und ein ähnliches für Anleihen mit Jahrescoupons.

*In gleichen Raten tilgbare Anleihen.*

Zwei Nomogramme von der Art des in Fig. 25 abgebildeten, von denen das eine für Anleihen mit Halbjahrescoupons und das andere für Anleihen mit Jahrescoupons gilt; ausserdem das in Fig. 26 abgebildete Nomogramm.

*Annuitätsanleihen.*

Für Anleihen mit Jahrescoupons das Nomogramm von KRAÏTCHIK, jedoch verbessert in der in § 14 und § 33d angegebenen Weise; für Anleihen mit Halbjahrescoupons die in § 33d besprochene Nomogrammserie. Ferner das in Fig. 26 abgebildete Nomogramm.

Für die Praxis erscheint es uns am zweckmässigsten, die Nomogrammserie für die Annuitätsanleihe in der Form eines Büchleins zusammenzustellen und die übrigen sechs Nomogramme auf Kartonblättern abzdrukken. Hat man diese Nomogramme zur Verfügung, so besitzt man eine vollständige Ausrüstung für die wichtigsten Anleihenarten.

---

## LITERATURVERZEICHNIS.

---

- Annales des Ponts et Chaussées.* Dunod. Paris.
- Chasles, M.* „Lettre de M. Chasles au rédacteur, au sujet d'un Mémoire de M. Plucker, inséré dans le Journal de M. Crelle". Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet. t. VI. Bruxelles 1830. p. 81.
- Correspondance mathématique et physique publiée par A. Quetelet.* Bruxelles.
- Dijke, van.* Complete Bond Value Tables. The Financial Press. New York 1923.
- Dorst, F. J.* „Über die Grösse der Beobachtungsfehler beim Ablesen eingetheilter Instrumente." Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 1886. p. 383.
- Eggert, O.* „Die Genauigkeit der Nonienablesung." Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1907. p. 635.
- Foerster, M.* Taschenbuch für Bauingenieure. Springer. Berlin 1920<sup>3</sup>.
- Foerster, W.* „Sur le rapport entre le grossissement des microscopes et la précision des mesures micrométriques". Comité international des poids et mesures. Proc.-Verb. des séances de 1878. p. 227.
- Gabel, A.* „Le tokomètre du Dr. B. H. de Jongh." Verz.-Archief XV (1934). p. (44).
- Grünert, A.* „Conradi's Detailkoordinatograph." Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1912. p. 152.
- Haafte, M. van.* De moderniseering der intrestrekening. Van Holkema en Warendorf. Amsterdam 1921.
- „Cours des emprunts pour divers modes de paiement de l'intérêt nominal." Verz.-archief XI (1930). p. (97).
- „Le cours d'un emprunt à agio déduit de celui d'un emprunt sans agio." Verz.-archief XII (1931), p. (9).
- Leerboek der intrestrekening. Noordhoff. Groningen 1929.
- Beschouwingen over politieke rekenkunde. Proefschrift Universiteit Utrecht. 1912.
- Hage, J.* Koersberekening. Nygh & van Ditmar, Rotterdam 1927.
- „Het samenstellen van Koerstabellen." Verz.-archief VIII (1927). p. (130).
- Huss und Hagström.* Bond Values. P. A. Norstedt & Söner. Stockholm 1929.
- Johnson, Stone, Cross und Kircher.* Yields of Bonds and Stocks. Prentice-Hall. Inc. New York 1923.
- Kamber, F.* „Le calcul du taux de rendement des obligations remboursables à une date déterminée." Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. 1928. p. 41.
- Kraitchik, M.* Sur quelques applications de la nomographie. Bruxelles 1918.
- Les tables graphiques financières. Gauthier-Villars. Paris 1927<sup>2</sup>.



- Kummer, G. „Mitteilung von Beobachtungsergebnissen über die Schätzungs- und Kartierungsgenauigkeit an Massstäben und Kartierungsinstrumenten". Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1907. p. 531, 561, 593.
- Maandblad voor het boekhouden onder hoofdredactie van W. Kreukniet. Uitgave G. Delwel, Den Haag.
- Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker. Stämpfli & Cie. Bern.
- Nouvelles Annales de Mathématiques. Paris.
- Ocagne, M. d'. Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Gauthier-Villars. Paris 1891.
- Traité de nomographie. Gauthier-Villars. Paris 1899<sup>1</sup>, 1921<sup>2</sup>.
- „Procédé nouveau de calcul graphique." Ann. des Ponts et Chaussées, 6e série. t. 8. (1884). p. 531.
- „Etude de deux systèmes simples de coordonnées tangentielles dans le plan: coordonnées parallèles et coordonnées axiales." Nouv. Ann. de Math. 3e série. t. III. (1884). p. 410, 456, 516.
- Le calcul simplifié. Gauthier-Villars. Paris 1928<sup>3</sup>.
- Calcul graphique et nomographie. Doin. Paris 1924<sup>3</sup>.
- Overeem, M. van. „Rentabiliteit van de Nederlandsche oorlogsleeningen." Maandbl.v. h. boekhouden. Sept. 1919. p. 8.
- Reinhertz, C. „Mittheilung einiger Beobachtungen über die Schätzungsgenauigkeit an Massstäben, insbesondere an Nivellirscaln." Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1894. p. 593.
- Riessen, J. F. A. van. „De coördinatograaf." Tijdschrift v. kadaster en landmeetk. 1925. p. 24.
- Rollins. Tables showing the net return from Serial and Instalment Bonds. Routledge & Sons. London. (Ohne Jahreszahl).
- Schols, Ch. M. Landmeten en waterpassen. Breda 1912<sup>9</sup>.
- Soreau, R. Nomographie ou traité des abaques. Chiron. Paris 1921.
- Tijdschrift voor kadaster en landmeetkunde. Van Druten. Utrecht.
- Verzekerings-archief, Het. Orgaan van de vereeniging voor de verzekeringswetenschap. M. Nijhoff. Den Haag.
- Vogler, C. A. Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln und deren Gebrauch. Ernst & Korn. Berlin 1877.
- Wenner, F. Praktische Rechenbildkunde. Aachener Verlags- und Druckerei-Gesellschaft. 1926.
- Werker, W. M. J. Die zusammengesetzte Zinsen- und Zeitrenten- oder Annuitätenrechnung. Handbuch zur Lösung von Aufgaben etc. Mit fünf Haupttafeln. Beyers. Utrecht. Puttkammer & Mühlbrecht. Berlin 1893. 2 Bde.
- Wetenschappelijke Balans van de Rijksverzekeringsbank 1917. Amsterdam 1919.
- Zeitschrift für Instrumentenkunde, Organ für Mittheilungen aus dem gesammten Gebiete der wissenschaftlichen Technik. Berlin. Springer.
- Zeitschrift für Vermessungswesen, Organ des Deutschen Geometervereins. Stuttgart. Wittwer.



# REGISTER

Ableseindex . . . . .	17	— typ 5, 9, 10, 45, 48, 72, 80,	81, 83, 84, 87, 88
— linie 39, 41, 42, 44—48, 50,	51, 88, 92	Abschluss von — . . . . .	2
Agio . . . . .	46	Aufgeldprozent . . . . .	45
Amortisation . . . . .	30	Betrag (nomineller —) . . . . .	5, 6
Amortisationsbetrag . . . . .	3	Bogen . . . . .	65, 66, 71, 78, 80
— zahlungsmodalitäten . . . . .	1	Bond yield chart . . . . .	39, 60, 84, 85
Anamorphosierbar . . . . .	15	<i>Chasles</i> . . . . .	17
Anlage . . . . .	1, 2	Coupon 4, 7, 84, 85, 87, 89, 94, 95	
— politik . . . . .	2	— fälligkeit . . . . .	4, 8, 9, 85
Wertpapier — . . . . .	2	— fälligkeitstag . . . . .	6
Anleihe mit gleichen Tilgungs-		— steuer 6, 9, 10, 32, 37, 38, 48,	49, 63, 82, 87—90, 94
raten 3, 5, 8—10, 65, 72, 77,	79, 82, 87, 88, 95	— steuergesetz . . . . .	6
— mit regelmässiger Tilgung 3,	5—8	<i>Cross</i> . . . . .	8
— mit Rückzahlung über pari	65, 80	<i>Darville</i> 39, 42, 44, 45, 51, 53,	54, 81, 84, 85
— mit unregelmässiger Tilgung	5, 65, 76—79	Dauer . . . . .	1, 45—47, 49, 58, 59
— ohne Aufgeld . . . . .	31, 81	<i>Dorst, F. J.</i> . . . . .	24, 25
Agio — . . . . .	8, 80	<i>Dijke, Van</i> . . . . .	8
Annuitäts — 4—6, 8—10, 27, 65,	73, 76, 82, 89, 95	Dualitätstransformation . . . . .	16, 17
à pari rückzahlbare — 5, 6, 8, 80		<i>Eggert, O.</i> . . . . .	25
auf einmal rückzahlbare — 3, 5—11,	39, 44, 45, 49, 51, 54, 55, 65, 68,	Fehler 36—38, 47—49, 59, 63, 64,	81, 82, 84, 89, 90, 92, 94
73, 77, 78, 82, 84, 85, 87, 88, 95		Coinzidenz — . . . . .	25
auf einmal mit Aufgeld rück-		mittlerer — . . . . .	25, 26, 37, 47
zahlbare — . . . . .	39, 45, 49	relativer — . . . . .	23
Aufgeld — . . . . .	5, 31	relativer Schätzungs — . . . . .	23, 24
Dauer der — 1, 45—47, 49, 58, 59		Schätzungs — . . . . .	23—25, 36, 47
Laufzeit der — 6, 7, 9—10, 29, 30,	37, 51, 60, 71, 72, 75, 77, 79,	Fluchtentafel 16—19, 23, 26, 39,	43, 87, 88, 91, 93
82, 87		Fluchtlinie . . . . .	16
nicht rückzahlbare — 3, 4, 8, 10, 11,	39, 43, 44, 48, 65, 66, 82, 85,	<i>Foerster, M.</i> . . . . .	26
87, 95		<i>Foerster, W.</i> . . . . .	25
Anleihenart . . . . .	45, 73, 90, 95	Funktionsskala . . . . .	12
		Genauigkeit 10, 18, 23—26, 32, 38, 48,	49, 60, 76, 88, 90, 92, 94
		— Tokometer . . . . .	36
		— bond yield chart . . . . .	47, 84



— graphische Tabellen . . .	59
— Rentabilitätsmesser . . .	81, 82
Gleitinstrument . . .	66, 80, 81
Graphische Tabellen . . .	55, 58, 60,
	63, 64, 84, 85
Grundplatte . . .	65, 66, 71, 73, 75,
	78, 79, 81, 82
Grünert, A. . . . .	25
Haafte, M. van . . .	2, 3, 7, 8
Hage, J. . . . .	7, 61, 63, 64
Hagström . . . . .	8
Huss . . . . .	8
Infinite maturity . . . .	44, 45
Interpolation . . . . .	
— mit dem Auge 10—12, 16, 23,	
	60, 63, 82, 84, 85, 90
lineare — . . . . .	7, 9, 77, 85
Interpolieren . . . . .	37, 47, 59
Isoplethen . . . . .	12
Jahreslinie(n) . . . . .	29, 31—33, 35
Johnson . . . . .	8, 39, 42, 44, 45, 51,
	53, 54, 81, 84, 85
Jongh, B. H. de . . . . .	11, 65, 73, 76,
	81, 84, 85, 87
Kamber, F. . . . .	50, 51
Kapitalanlage . . . . .	1
— einheit . . . . .	6
nominal — . . . . .	4, 5
nominelles — . . . . .	3, 6
Kircher . . . . .	8
Koordinaten . . . . .	
d'Ocagne'sche — . . . . .	18
Parallel — . . . . .	17
Koordinatograph . . . . .	25, 26
Kraitchik, M. . . . .	11, 27, 30, 32, 35,
	76, 81, 89, 95
Kummer, G. . . . .	24, 25
Kurs 1, 2, 4—10, 29, 31, 36, 37, 40,	
	42, 44, 45, 47—49, 58, 59, 66,
	67, 71, 75—77, 80, 81, 84, 86,
	89, 90
— aufgabe . . . . .	11, 60, 95
— bestimmung . . . . .	9, 30, 31, 36,
	37, 84, 89, 90, 94
bond yield chart 42, 44—46, 84	
graphische Tabellen . . .	59

Rentabilitätsmesser . . .	67, 71,
	75, 76, 82
Tokometer . . . . .	29
— formel 3, 4, 7—11, 30, 39, 54,	
	55, 66, 68, 78, 80, 88, 92, 94
— gewinn . . . . .	77
— linie(n) 66, 67, 69—72, 75, 78,	
	80, 81, 83
— tabelle 9, 10, 49, 60, 64, 84,	
	87, 88, 90
— tafel . . . . .	92
graphische — tafel 10, 11, 82	
numerische — tafel 10, 11, 95	
— verlust . . . . .	77
— wert . . . . .	9, 10, 41, 46, 67
Ausgabe — . . . . .	6
Rückzahlungs — . . . . .	6
Zwischenzeitliche — bestim-	
mung . . . . .	6, 7, 85, 91
Börsen — . . . . .	1, 2
mathematischer — . . . . .	1, 2, 3
Läufer . . . . .	65, 66
Laufzeit 6, 7, 9—11, 29, 30, 37, 51,	
	60, 71, 72, 75, 77, 79, 82, 87
Lebensversicherungsgesellschaft . .	2
Lippmann . . . . .	55, 60, 63, 84
Logarithmentafel . . . . .	7
Netz . . . . .	87
— tafel . . . . .	13, 14, 16—18, 55
— zweifach bezifferter Punkte	
	40, 53, 86, 94
Nominalkapital . . . . .	4, 5
Nomogramm 1, 10, 11, 14, 16, 17, 20,	
	21, 23—26, 32, 33, 39, 40, 42—
	44, 51—55, 58—60, 62, 84—95
— aus drei Geradenscharen . . .	61
— grösse . . . . .	23
— mit beweglichen bezifferten	
Scharen . . . . .	19
— mit gerichteten bezifferten	
Scharen . . . . .	27, 73
— mit gleitenden (bezifferten)	
Scharen . . . . .	33, 68, 72
Nomogrammsammlung (serie) . . .	32,
	62, 63, 89, 90, 95
Nomographie . . . . .	1, 11, 12, 23



- Nomographisches Hilfsmittel 11, 84,  
85, 88, 89  
— Instrument . . . . . 11  
Obligationen . 4, 55, 84, 87—89  
*Ocagne, M. d'* 1, 11, 12, 16, 17, 23  
*Overeem, M. van* . . . . . 2  
Parallelkoordinaten . . . . . 17  
Prämienreserve . . . . . 2  
Präzisionslineal . . . . . 25, 26  
Prozentsatz . . . . . 49, 67  
*Quetelet, A.* . . . . . 17  
Rechenschieber . . . . . 20, 49  
*Reinhertz, C.* . . . . . 24  
Rendite . . . . . 2  
Rentabilität . . . . . 30, 55  
Rentabilitätsaufgabe . . . . . 11, 60  
— bestimmung 10, 89, 90, 94  
    bond yield chart 41, 44,  
    45, 84  
    graphische Tabellen . 58  
    Hage'schen Nomogramme 63  
    Rentabilitätsmesser 66, 71,  
    75, 76, 78, 80, 82  
    Tokometer . . . . . 29  
— messer 65, 67, 71, 73, 75, 76,  
    78—81, 85, 87, 88  
— prozentsatz . . 41, 44, 46  
*Riessen, J. F. A. van* . . . . . 25  
*Rollins* . . . . . 8, 88  
*Rosenthal* . . . 55, 60, 63, 84  
Schar bezifferter Linien 12—14, 16,  
21, 79, 80  
— bezifferter Punkte 12, 13, 16,  
18—21, 27, 73, 79  
— zweifach bezifferter Punkte 12,  
13, 68, 91, 92  
gerichtete bezifferte — . . . 21  
gleitende bezifferte — . . . 19  
Schieber 29, 65—67, 71, 75, 78,  
80, 81, 83  
*Schols, Ch. M.* . . . . . 25  
Skala  
Doppel — . . . . . 30  
Funktions — . . . . . 12  
Kurs — 29, 31—33, 35—37, 40,  
42, 44—48, 92  
logarithmische — 12, 31, 66, 67  
Punkt — . . . . . 16  
reguläre — . . . . . 12, 24, 92  
Skalenträger . . . . . 40, 44, 93  
*Soreau, R.* 11, 15, 23, 32, 33, 35, 76  
Steuer . . . . . 6  
*Stone* . . . . . 8  
Tilgung . . . . . 5, 6, 77  
Tilgungsraten . . . . . 5  
Tokometer 27, 29—33, 35, 36, 76  
Trennung der Veränderlichen . . 53  
Versicherungsgesellschaft . . . 2  
Verstreckbar . . . . . 15, 61  
Verstreckbarkeit . . . . . 15  
Verzinsung  
    durchschnittliche — . . . . 2  
    reelle — . . . . . 2  
*Vogler, C. A.* . . . . . 12, 23  
*Wenner, F.* . . . . . 43  
*Werker, W. M. J.* . . . . . 7  
Wertpapier . . . . . 2, 6  
— anlage . . . . . 2  
— bestand . . . . . 2  
Zinsaufgaben . . . . . 95  
— funktion . . . . . 7  
— linien 29, 32, 35, 36, 38, 75  
— perioden . . . . . 42  
— rate . . . . . 4  
— rechnung . . . . . 1  
— zahlungsmodalitäten . . . . 1  
laufender — . . . . . 7  
nomineller — 3, 4, 6, 8, 9, 45, 51,  
76, 87, 88  
reeller — 8, 9, 29, 39, 49, 51, 84, 85  
Zinsfuss  
nomineller — 1, 2, 8, 10, 11, 29  
37—40, 42, 44—46, 51, 56, 58—  
60, 63, 66, 67, 71, 75—77, 80,  
81, 84, 87—90  
reeller — 1—4, 6, 7, 10, 29—31, 39,  
42—47, 50, 51, 56, 58, 59, 62,  
63, 66, 67, 71, 72, 75—80, 87—90  
scheinbarer — . . . . . 4, 51





## STELLINGEN

### I.

De oplossing van koers- en rendementsproblemen kan door de toepassing der nomografie belangrijk vereenvoudigd worden.

### II.

In de nomografie verdient het gebruik van evenwijdige lijn-coördinaten aanbeveling.

### III.

De door J. C. G. NOTTROT ingevoerde benaming *bundelnomogram* is niet juist voor alle nomogrammen, die hiertoe gerekend worden en dient vervangen te worden door een andere, b.v. *nomogram met concurrente afleeslijnen*.

J. C. G. NOTTROT, *Leerboek der nomografie*. Groningen 1930, p. 18.

### IV.

Ten onrechte beweren verschillende schrijvers over nomografie, dat de Fransche geograaf BUACHE de eerste was, die *niveaulijnen* toepaste.

R. SOREAU, *Extrait des mémoires de la société des ingénieurs civils de France*. Paris 1902, p. 192.

S. BRODETSKY, *A first course in nomography*. London 1925<sup>2</sup>, p. XI.

J. C. G. NOTTROT, l.c., p. 1.

## V.

Als  $X, Y, Z \dots$  aléatoire grootheden zijn en  $T = X + Y + Z + \dots$ , terwijl  $X, Y, Z \dots$  in waarschijnlijkheidstheoretischen zin onafhankelijk van elkaar zijn en een eindig aantal grootheden voorstellen, dan is  $E(T) = E(X) + E(Y) + E(Z) + \dots$ , waarbij onder  $E(Q)$  verstaan wordt de mathematische verwachting van  $Q$ .

R. RISSE et C. E. TRAYNARD, *Les principes de la statistique mathématique*. Paris 1933, p. 124.

## VI.

De door E. KAMKE gegeven definitie van de mathematische waarschijnlijkheid heeft alleen voor „innermathematische” problemen zin.

E. KAMKE, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Leipzig 1932, p. 2.

## VII.

De methode van R. SOREAU, om te onderzoeken of de vergelijking

$$E(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

tot den vorm

$$f(x_1, x_2) = g(x_3, x_4)$$

herleid kan worden, kan door een meer eenvoudige vervangen worden.

R. SOREAU, *Nomographie ou traité des abaques*. Paris 1921, t. 2., p. 129.

## VIII.

Voor de raming van de toekomstige bevolkingssterfte is een onderzoek naar de doodsoorzaken ter afleiding van partieele sterftekansen en het verloop van deze met den tijd, noodzakelijk.

*Wetenschappelijke balans van het invaliditeitsfonds op 31 December 1929*. Amsterdam z. j., p. 24.



## IX.

De gevoeligheid van een fotografische plaat te karakteriseeren met de zoogenaamde Din-graden, is onvolledig.

*Naturwissenschaften* 21, 734, 1933.

## X.

De verlichtingswaarde van gasvullings-, kwik- en natrium-lampen wordt door een complex van factoren beheerscht en is ook afhankelijk van het doel, waarvoor de lichtbron gebruikt wordt.

*De Ingenieur* 49, A 31. A 243. A 290, 1934.

## XI.

Een zuiver wiskundige behandeling der elementaire mechanica is verwerpelijk.

---





